

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224576

UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No

۵۱۲
ج-۲

Accession No.

۸۳۷۳

Author

جبر و قایل جبر و دل

Title

تافنی جبر و دل

This book should be returned on or before the date last marked below.

ایہ کتاب میکسن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع شدگی گئی ہے۔

مُقَدِّمہ



دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، 'ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قہ یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گزری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کر کے تنہا اور الگ ٹھلک نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

”دنئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے“

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور ہیج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہوئگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کہیں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کہیں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈسنگ سمجھائیں گے۔ ایسے وقت میں تو ہم تصنیف سے زیادہ قابل قدر زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہنر اکڑالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سے سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ **نَوَابِ صِدِّیقِ عَمَّانُ عَلِيخان بھلا سر فتح جنگ** جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنت نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں اچانے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، یہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سررشتہ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریں گے بلکہ ملک میں نشر و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہارلاند، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سرسید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں **اَعْلٰی حَضَرَت وَاَقْلَس** جیسے علم پرور
فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں
خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
عبدالرحمن ثالث نے، بکراجیت و اکبر نے ہندوستان میں
الغزوے انگلستان میں پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں
اور منت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت
اَصْفِیَہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ **اَعْلٰی حَضَرَت وَاَقْلَس**
کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فرد مباحثات
کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے،
اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب
و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ
دستی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے
فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیات انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں سمجھتا دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تفسیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا ایک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن بادیود بعد مسافت و اختلاف حالات ایک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰ حضرت و اقلنس نے

پہانا اور جامعہ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعہ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتداء سے انتہا تک ذریعہ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں ”ہانت بہانت کی بولیاں“ بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور نہاد خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوئے کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صمیم ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مینا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی مان ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مینا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتہ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتہ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ ہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہر علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہر لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحات بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہل علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعد مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بہوں پڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نچ پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصول ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے مادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کر لیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترتا تو خود شکالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کر لیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں رد و بدل نہ ہو سکے، بلکہ **فرہنگ اصطلاحات عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فرو گذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھانی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے + اس سرشت کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرض اولین ہے) کہ وہ نصابِ تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جمالت کا استیصال ہو۔ جمالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتاہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جمالت کا مقابلہ کر کے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سرشت قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہتائی کرتی ہے پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (یرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

”ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی کامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہم اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے میں بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔ اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا بھجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سہی ہے اور پہلی سہی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے، نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی 'نوہ' جدوجہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کر لے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرے کا بھی ستارہ بن سکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور

اَعْلٰی حَضَرَتِ وَاَقْلَسْ کی نظر کہیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مذہب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبحِ وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شبِ بیدارِ روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصرِ رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

دلغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیریں حکمت کی خاطر سنگدلانہ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرنا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکان مجلس وضع اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کو توالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعہ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبد الحق

ناظم سررشتہ، تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

اَلْكَاتِبَاتُ



- مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ ناظم۔
 فاضل محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ ریگڑ۔۔۔۔۔ مترجم ریاضیات
 پودھری برکت علی صاحب بی۔ بی۔ سی۔۔۔۔۔ مترجم سائنس
 مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
 مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم معاشیات
 فاضل تلمذ حسین صاحب ایم۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم سیاسیات
 مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
 مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم فلسفہ و منطق
 مولوی عبدالحکیم صاحب شرر۔۔۔۔۔ مولف تاریخ اسلام
 مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم قانون۔
 مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم کتب عربی
 علاوہ ان مذکورہ بالا مترجمین کے مولوی حاجی
 صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطہ نظر
 سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب
 طباطبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

ارکان مجلس افاضیہ دہلی

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سکر علی (سابق نظم مہم شہری)
 مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
 نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
 مولوی حمید الدین صاحب سلیم
 مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سرشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے ، مترجمین سرشتہ تالیف و ترجمہ نیز
 دوسرے اصحاب سے بلجاء اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً
 خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے ریٹائر (پرنسپل ٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
 مولوی عبدالواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
 پروفیسر عبدالرحمن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)
 مرزا محمد ہادی صاحب بی۔ اے (پروفیسر کرپن کالج لکھنؤ)
 مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

دیسپاچ



حسب ہدایات ذیلی مجلس ریاضیات جمیرو مقابلہ حصہ اول کو جامعہ عثمانیہ کی انٹرمیڈیٹ جماعتوں کے لئے برنار، الجبر اہل ایڈٹنا تالیف کیا گیا ہے، اگرچہ ”برنار“ کی قید اکثر تکلیف دہ اور پریشان کن ثابت ہوئی تاہم جس قدر ممکن تھا اس امر کو پیش نظر رکھ کر اس کتاب کو اپنی حدود کے اندر مکمل بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ ترتیب معنائین تقریباً وہی ہے جو ہال اینڈ ٹائٹ میں ہے صرف سلسلہ ہندسیہ اور مسئلہ ثنائی کی بحث میں سلسلوں کے اتساع اور استدقاق کے متعلق چند مسائل کا اضافہ کر دیا گیا ہے جن کے بغیر غیر متناہی سلسلوں کے مجموعہ کو کسی قسم کے معنی پہنانا محض ناممکن ہے، مسئلہ ثنائی کو اس صورت میں جبکہ قوت نامثبت صحیح عدد نہ ہو مسئلہ واندرماند کے ذریعہ ثابت

کیا گیا ہے، یولر کے ثبوت کی نسبت یہ ثبوت اگرچہ ہندیوں کے لئے مشکل ہے مگر مجموعی طور پر قابل ترجیح ہے۔

اس تالیف میں خاص طور پر اس بات کو ملحوظ رکھا گیا ہے کہ جامعہ (یونیورسٹی) کے طلبہ کے لئے ایک عملی کتاب نصاب میار کی جائے جس میں جملہ نظریات کی توضیح مثالوں اور عملیات سے ہو، طلبہ اکثر نظریات کو از بر کر کے امتحانات میں سند حاصل کر لیتے ہیں مگر فی الحقیقت ان میں وہ قوت تخیل اور "دماغی توجہ" پیدا نہیں ہوتا جو ریاضیات کے معمولی سے معمولی طالب علم میں ہونا چاہیئے۔ اعلیٰ ریاضی کی مختلف شاخوں میں اگر بجائے نظریات کے ہمارے نصاب اور امتحانات میں عملیات پر زیادہ زور دیا جائے تو بہتر نتائج پیدا ہو سکتے ہیں، اس نقطہ خیال سے مشقی اور حل کردہ مثالوں کی ایک کثیر تعداد نظریات کی توضیح کے لئے فراہم کی گئی ہے ان میں سے اکثر مستند انگریزی کتابوں اور دیگر امتحان کے پرچوں سے لی گئی ہیں۔ فقط

محمد حسین

فہرست مضامین

باب اول

نسبت

صفحہ

۲

متوافق اور متباہن مقادیر

۴

نسبت صغریٰ، نسبت کبریٰ

۸

$$\left(\frac{\text{پا} + \text{قج} + \text{دع} + \dots}{\text{پب} + \text{ق د} + \text{د ف} + \dots} \right) = \dots = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

۱۴

نسبت کی ترقیمی تعبیر

۱۷

ضرب چلیپائی

۲۱

تین معادلات درجہ اول کا حاصل اسقاط

۲۲

امثلہ نمبری ۱

باب دوم

تناسب

صفحہ

۲۹

۴۰

۴۳

تناسب مسلسل اور دیگر مسائل
تناسب کی تعریف جبریہ کا اقلیدس کی تعریف تناسب سے مقابلہ
امثلہ نمبری ۲

باب سوم

تغییر

۴۸

۴۹

۵۲

۵۴

تغییر تابع اور تغیر متبوع

تغییر مستقیم

تغییر معکوس

تغییر مشترک

اگر y x کا مستقل ہو اور y x کا مستقل ہو تو

۵۶

۶۵

y x کا مستقل ہو اور x y کا مستقل ہو تو

امثلہ نمبری ۳

باب چہارم

سلسلہ حسابیہ

۷۰

سلسلہ کی تعریف

- ۷۴ سلسلہ حسابیہ کی ن رقموں کا مجموعہ
 ۷۶ اواسط حسابیہ
 ۸۰ جب ن رقموں کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلہ کی کسی رقم کا دریافت کرنا
 ۸۲ مثلہ نمبری ۴
 ۸۶ ف ن + (۱۲-ف) ن - ۲ ص = ۰ کی قیمتوں کے متعلق بحث
 ۹۱ مثلہ نمبری ۵

باب پنجم سلسلہ ہندسیہ

- ۹۵ تعریفات
 ۹۶ اواسط ہندسیہ
 ۹۸ سلسلہ ہندسیہ کی ن رقموں کا حاصل جمع
 ۱۰۰ مجموعہ سلسلہ غیر متناہی
 ۱۰۳ سلسلہ ہندسیہ کا اتساع اور استدقاق
 ۱۰۶ مثلہ نمبری ۶
 ۱۰۸ متوالی کسور اعشاریہ
 ۱۱۰ خاص قسم کے سلسلوں کا جمع کرنا
 ۱۱۳ سلسلہ ہندسیہ کی متفرق مثالیں
 ۱۱۸ مثلہ نمبری ۷

باب ششم

۱۔ سلسلہ موسیقیہ

۱۲۲ سلسلہ موسیقیہ میں جو مقادیر ہوں ان کے مقلوب سلسلہ حساب میں ہوتے ہیں

۱۲۳ اداسط موسیقیہ

۱۲۸ اداسط ح' ھ' م کی تعمیر ہندسیہ

۱۳۳ سلسلہ موسیقیہ کی متفرق مثالیں

۱۳۶ امثلہ نمبری ۸

۱۳۹ اعداد طبعیہ

۱۳۹ حح طریق کثابت

۱۴۰ پہلے ن طبعی اعداد کا حاصل جمع

۱۴۱ پہلے ن طبعی اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع

۱۴۱ پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع

۱۴۹ سلسلوں کے جمع کرنے کی خاص صورتیں

۱۵۴ گولیوں کے انبار

۱۵۴ جو مینار مربع قاعدہ پر قائم ہو اس میں گولیوں کی تعداد

۱۵۴ جس مینار کا قاعدہ مثلث متساوی الاضلاع ہو اس میں گولیوں کی تعداد

۱۵۵ جس مینار کا قاعدہ مستطیل ہو اس میں گولیوں کی تعداد

۱۵۶ نامکمل مینار

۱۵۷ امثلہ نمبری ۹

باب ہفتم

مقادیر اصم

تعریفات

۱۶۲

۱۶۳

کے نسب نامہ کا ناطق بننا

$$\frac{1}{\text{ماب} + \text{ماج} + \text{ماد}}$$

۱۶۶

مفرد جملہ اصم کا منطق جز منبری

۱۶۸

ثما \neq ثما ب کا منطق جز منبری

اگر $\text{ا} + \text{ماب} = \text{لا} + \text{ما}$ تو

۱۷۲

$\text{ا} = \text{لا}$ اور $\text{ب} = \text{ما}$

۱۷۲

$\text{ا} + \text{ماب}$ کا جذر

۱۷۳

$\text{ا} + \text{ماب} + \text{ماج} + \text{ماد}$ کا جذر

۱۷۵

$\text{ا} + \text{ماب}$ کا جذر الکعب

۱۸۱

امثلہ نمبری ۱۰

باب ہشتم

مقادیر خیالی

۱۸۳

$\text{خ}^2 = \text{ا} - \text{ا} \times \text{ا} - \text{ا} = ۱ -$

۱۸۷

اگر $\text{ا} + \text{ب} = \text{ا} - \text{ا} = ۰$ تو $\text{ا} = ۰$ ' $\text{ب} = ۰$

۱۸۷

اگر $\text{ا} + \text{ب} = \text{ا} - \text{ا} = \text{ج} + \text{د} - \text{ا} - \text{ا}$ تو $\text{ا} = \text{ج}$ اور $\text{ب} = \text{د}$

- متعدد خیالی عددوں کا حاصل جمع اور حاصل ضرب اور دو خیالی عددوں کا
 ۱۸۸ خارج قسمت عدد خیالی کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے
 ۱۹۰ اگر j (لا + خا) = ک + خق تو j (لا - خا) = ک - خق
 دو خیالی عددوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اُن کے مقیاسوں کے
 ۱۹۵ حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے
 ۱۹۹ اعداد خیالی پر اعمال اضم کا اثر
 ۲۰۲ $1 - j$ یا j کی قوتیں
 ۲۰۳ ایک کے جذرا لکب کی قیمتیں $1 + \sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 0$
 ۲۰۶ امثلہ نمبری ۱۱

باب نہم

مسائل مساوات درجہ دوم

- ۲۱۰ مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ
 ۲۱۰ مساوات درجہ دوم کی دو سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں
 ۲۱۲ مساوات درجہ دوم کا حل
 ۲۱۳ مساوات درجہ دوم کی قیمتیں حقیقی، مادی، خیالی ہونے کی شرائط
 ۲۱۵ قیمتوں کا حاصل جمع = $-\frac{b}{a}$ اور قیمتوں کا حاصل ضرب = $\frac{c}{a}$
 ۲۱۶ قیمتیں معلوم ہوں تو مساوات کا دریافت کرنا۔
 مساوات درجہ دوم کی ایک قیمت صفر، دونوں قیمتیں صفر، ایک قیمت
 ۲۲۰ غیر متناہی، دونوں قیمتیں غیر متناہی
 ۲۲۲ امثلہ نمبری ۱۲

۲۲۵	لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ $ا + لا + ب + لا + ج$ کی علامت عموماً وہی ہوتی ہے جو $ا$ کی جو سوائے چند صورتوں کے -
۲۲۹	امثلہ نمبری ۱۳
۲۳۱	$ا + لا + ہ + لا + ب + لا + گ + لا + ف + لا + ج$ کے دو اجزاء فرضی درجہ اول میں تحلیل ہونے کی شرط
۲۳۲	معادلات $ا + لا + ب + لا + ج = ۰$ اور $ا + لا + ب + لا + ج = ۰$ کی قیمتوں کے متماثل ہونے کی شرط
۲۳۳	$ا + لا + ب + لا + ج = ۰$ اور $ا + لا + ب + لا + ج = ۰$ کی ایک قیمت مشترک ہونے کی شرط
۲۳۴	امثلہ نمبری ۱۴

باب دہم

مساواتیں جو مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں

۲۳۷	مساوات $\{ج (لا)\} + ف + \{ج (لا)\} + ق = ۰$ کا حل
۲۴۰	مساوات $ا + لا + ب + لا + ج + ف + لا + ب + لا + ج = ق$ کا حل
۲۴۲	غیرناطق اور مکسور مساواتیں
۲۴۶	معادلات متکافہ
۲۴۸	مساوات متکافی کی تعمیر
۲۵۵	امثلہ نمبری ۱۵
۲۵۷	دو مقادیر مجہول کی ہمزاد مساواتیں
۲۵۹	متجانس مساواتیں

۲۶۲

امثلہ نمبری ۱۶

۲۶۳

تین یا تین سے زیادہ مقادیر مجہول کی مساواتیں

۲۶۷

امثلہ نمبری ۱۷

باب یازدہم

بہ ترتیب واجتماع

۲۶۹

ابتدائی مسائل

۲۷۵

ن اشیا میں سے 'ر' اشیا کی ترتیبوں کی تعداد

۲۸۱

ن اشیا میں سے 'ر' اشیا کے اجتماعوں کی تعداد

۲۸۴

ن اشیا میں سے 'ر' اشیا کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہوتی ہے جو
 انہی اشیا میں سے ن - 'ر' - 'ن' - 'ر' اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہو
 ن اشیا میں سے 'ر' اشیا کے ایسے اجتماع جن میں ایک خاص شے

۲۸۷

ہمیشہ شامل ہوتی ہے

۲۹۳

ل + م + ن اشیا کے پارس

۲۹۷

امثلہ نمبری ۱۸

۳۰۲

مختلف اور متشابہ اشیا

جب ن اشیا میں سے ف متشابہ اشیا ایک قسم کی ہوں، ق متشابہ
 اشیا دوسری قسم کی، ر متشابہ اشیا تیسری قسم کی اور باقی سب مختلف تو
 ان سب اشیا کی اکٹھی ترتیبوں کی تعداد

۳۰۲

ن اشیا میں سے 'ر' اشیا کی ترتیبیں اُس صورت میں جبکہ ہر ایک
 شے کسی ایک ترتیب میں ایک مرتبہ، دو مرتبہ، تین مرتبہ، در مرتبہ تکرار پاسکے۔

۳۰۶

- ۳۰۷ ن اشیا میں سے چند یا سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے
 ۳۰۸ ن اشیا میں سے r اشیا کے اجتماعوں کی بڑی سے بڑی تعداد
 ۳۱۱ ن اشیا میں سے r اشیا کے اجتماعوں کی تعداد (متبادل ثبوت)
 ۳۱۳
$$\text{ن ج} + \text{ن ج} = \text{ن ج}$$

- ۳۱۵ فن + ق + د + اشیا میں سے چند یا سب کی سب اشیا منتخب
 کرنے کے کل ممکن طریقے اُس صورت میں جبکہ فن متشابہ اشیا ایک قسم
 کی ہوں، ق متشابہ اشیا دوسری قسم کی اور متشابہ اشیا تیسری کی اور علیٰ بذالقیاس
 ۳۱۶ مدور ترتیبیں
 ۳۱۷ موتیوں کے ہار
 ۳۲۱ مسئلہ نمبری ۱۹

باب دوازدهم

استقرار حسابیہ

- ۳۲۶ ترکیب ثبوت اور توضیحی مثالیں
 ۳۲۹ ن اجزاء ضربی ثنائی (بشکل لا + لا) کا حاصل ضرب
 ۳۳۲ مسئلہ نمبری ۲۰

باب سیزدهم

مسئلہ ثنائی

- ۳۳۶ (لا + لا) ن کی صورت تفصیلی جب ن مثبت صحیح عدد ہو
 ۳۳۹ استقرار حسابیہ کی مدد سے مسئلہ ثنائی کا ثبوت مثبت صحیح قوت نامی صورت میں

- ۳۴۱ مسئلہ ثنائی کا تیسرا مختصر ثبوت
- ۳۴۵ صورت تفصیلی کی رقم عامہ
- ۳۵۰ امثلہ نمبری ۲۱
- اگر n مثبت صحیح عدد ہو تو $(n+1)$ کی صورت تفصیلی میں شروع اور اخیر سے متبادی الفصل رقموں کے برابر ہوتے ہیں
- ۳۵۲ $(n+1)$ کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم جب n مثبت صحیح عدد ہو
- ۳۵۳ رقموں کے سروں کا مجموعہ جب n مثبت صحیح عدد ہو
- اگر n مثبت صحیح عدد ہو تو $(n+1)$ کی صورت تفصیلی میں جفت سروں کا مجموعہ طاق سروں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے
- ۳۵۴ متفرق مثالیں
- ۳۶۰ امثلہ نمبری ۲۲
- ۳۶۲ سلسلوں کا اتساع اور استدقاق
- اگر کسی سلسلہ غیر متناہی کی رقیس یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو وہ مستحق ہوگا اگر اُس کی ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداداً کم ہو
- ۳۶۸ اگر ایک سلسلہ غیر متناہی میں کسی خاص رقم سے شروع ہو کر اُس کے بعد کی تمام رقیس ایسی ہوں کہ ہر ایک رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل سے ایک ایسی مقدار سے تعداداً کم ہو جو خود بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے تو سلسلہ مستحق ہوگا
- ۳۶۹ امثلہ نمبری ۲۳
- ۳۷۳ مسئلہ ثنائی کی صورت تفصیلی جب n مثبت صحیح عدد نہ ہو
- ۳۷۴

تکرار کی اجازت ہو برابر ہے $n + r - 1$ اشیا میں سے r اشیا

۴۰۸

کے اجتماعوں کی تعداد کے جب تکرار کی اجازت نہ ہو

۴۱۱

امثلہ نمبری ۲۶

باب چہارم

مسئلہ کثیر الارقام

(۱+ب+ج+د+.....) کی صورت تفصیلی میں کسی رقم معینہ کا

۴۱۶

سر جب ح مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱+ب+آ+د+.....) کی صورت تفصیلی کی رقم عام

۴۱۸

جب n کوئی مقدار ناطق ہو

۴۲۱

امثلہ نمبری ۲۷

باب پانزدہم

لوکارتم

۴۲۳

تعریف - $n = 1$ لوکارتم

۴۲۵

ابتدائی مسائل

۴۲۹

امثلہ نمبری ۲۸

۴۳۱

مروج لوکارتموں کا بیان

۴۳۲

ایک سے بڑے عدد کے لوکارتم کا میٹر

- ۴۳۳ کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا میٹر
 ۴۳۴ نظام عشری کے فوائد
 ۴۳۶ اعشاریہ لوکارتمی کو ہمیشہ مثبت رکھنے کی ضرورت
 اگر اساس ۱ پر عددوں کے لوکارتم معلوم ہوں تو اساس ب پر اُن کے
 ۴۳۸ لوکارتموں کا نکالنا -
 ۴۳۹ لوک ب \times لوک ب ۱ = ۱
 ۴۴۲ اصول اجزاء متناسب
 اگر اعداد سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو اُن کے لوکارتم سلسلہ حسابیہ
 ۴۴۴ میں ہوتے ہیں
 ۴۴۷ عکسی لوکارتم
 ۴۵۲ مسئلہ نمبری ۲۹ (۱) اور (ب)

باب شانزدہم

سلسلہ قوت نما اور لوکارتمی سلسلے

- ۴۵۷ ۱) کی صورت تفصیلی - نو کی قیمت سلسلہ کی صورت میں
 ۴۵۹ $(\frac{1}{10} + 1)$ کی حد وہ ہے جب ن غیر متناہی ہو
 ۴۶۰ مسئلہ قوت نما کا متبادل ثبوت
 ۴۶۳ لاکھ محدود قیمتوں کے لئے نو کی صورت تفصیلی مستحق ہے
 ۴۶۴ $9 = \dots\dots\dots 2541828$ 'نیری یا طبعی لوکارتم'
 ۴۶۵ لوک (۱+۱) کی صورت تفصیلی، لوکارتمی سلسلہ

الْجَبَر

باب اوّل نسبت

۱۔ تعریف (جو ہم جنس مقادیر میں بلحاظ قدر کے جو ربط ہوا اسے نسبت کہتے ہیں) اور اس ربط کو اس طرح مقابلہ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کونسا ضیغ حصہ یا حصّے ہیں۔
 ا اور ب کی نسبت کو بالعموم ﴿ا : ب﴾ کہتے ہیں مقادیر ا اور ب کو ارقام نسبت کہتے ہیں۔ پہلی رقم مقدم نسبت کہلاتی ہے اور دوسری رقم تالی نسبت۔

۲۔ اگر یہ معلوم کرنا ہو کہ ا مقدار ب کا کونسا ضیغ یا حصّہ ہے تو ا کو ب پر تقسیم کرنا چاہیئے پس نسبت ا : ب کا اندازہ کسر $\frac{ا}{ب}$ سے لگ

سکتا ہے اور آئندہ اسی طریق کتابت کو اختیار کرنے میں سہولت ہوگی۔
 اگر دو مقادیر کا مقابلہ کرنا ہو تو انہیں ایک ہی اکائی کی رقوم میں بیان کرنا چاہیے
 پس دو پونڈ اور ۵ اسٹلنگ کی نسبت کا اندازہ کسر $\frac{2 \times 20}{15}$ یعنی $\frac{40}{15}$ سے ہو سکتا ہے
نوٹ۔ چونکہ لفظ نسبت سے یہ معنی مفہوم ہوتے ہیں کہ ایک مقدار کتنی دفعہ دوسری

مقدار میں شامل ہے اسلئے معلوم ہوا کہ ہر ایک نسبت مقدار مجرد ہے۔

$$۴ - چونکہ بموجب قوانین کسور $\frac{1}{ب} = \frac{م}{م \times ب}$$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نسبت ۱ : ب نسبت م : م ب کے برابر
 ہے یعنی اگر کسی نسبت کے مقدم اور تالی دونوں کو ایک ہی مقدار سے ضرب
 دیدیا جائے تو نسبت میں فرق نہیں آتا۔

۴ - دو یا دو سے زیادہ نسبتوں کا مقابلہ ان کی کسور متساوی کے نسب
 نمایوں کو یکساں بنانے سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ دو مجوزہ نسبتیں

$$۱ : ب اور لا : ما ہیں۔ چونکہ $\frac{۱}{ب} = \frac{لا}{لا \times ب}$ اور $\frac{۱}{ما} = \frac{ب}{ب \times ما}$$$

اسلئے نسبت ۱ : ب بڑی ہے یا برابر ہے یا چھوٹی ہے نسبت لا : ما
 سے بموجب اس کے کہ لا : ما بڑا ہے یا برابر ہے یا چھوٹا ہے ب : لا سے۔
 دو کسروں کی نسبت دو اعداد صحیح کی نسبت سے تعبیر ہو سکتی ہے نسبت

$$\frac{۱}{ب} : \frac{۱}{د} کا اندازہ کسر $\frac{۱}{ب} \div \frac{۱}{د} = \frac{د}{ب}$ سے یعنی ب : د سے ہو سکتا ہے اور اسلئے$$

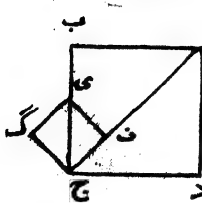
نسبت مذکورہ ۱ : ب ج کے مساوی ہے۔

۵ - اگر کسی نسبت کی ایک یا دونوں رقیبیں مقادیر اعم ہوں تو دو ایسے

اعداد نہیں مل سکتے جو اس نسبت کو ٹھیک ٹھیک تعبیر کر سکیں مثلاً ۱ : ۱۰
 صحیح طور پر دو اعداد صحیح کی رقوم میں بیان نہیں ہو سکتی۔

تعریف - جب دو مقداروں کو ایک تیسری مقدار پورا پورا تقسیم کر دے تو انہیں مقادیر متوافقہ کہتے ہیں اور اس تیسری مقدار کو وفق مشترک کہتے ہیں اور جب دو مقداروں کا کوئی وفق مشترک نہیں ہوتا تو ان کو متباہن کہتے ہیں [یاد رہے کہ اعداد جبریہ اور مقادیر ہندسیہ ہر دو کے لئے ہی اصطلاحیں استعمال کی جاتی ہیں] تمام اعداد صحیح متوافق ہیں کیونکہ ان کا وفق مشترک واحد ہے۔ اسی طرح سے تمام کسور ناطقہ متوافق ہیں کیونکہ ان کی تجزیل ایسی کسروں کی طرف ہو سکتی ہے جن کے نسب نامہ متحد ہوں۔ ایسی کسروں کا وفق مشترک وہ کسر ہے جس کا نسب نامہ تو وہی نسب نامہ مشترک ہو اور شمار کنندہ واحد ہو۔

جو دو مقداریں وفق مشترک رکھتی ہوں وہ دو عددوں سے تعبیر ہو سکتی ہیں جتنی دفعہ وفق مشترک ان مقادیر میں پایا جاتا ہو اتنی دفعہ کی تعداد کو یہ اعداد تعبیر کریں گے لیکن دو مقادیر متباہن کسی دو عددوں یا کسروں سے تعبیر نہیں ہو سکتیں مقادیر میں متباہن پیدا ہونے کا باعث یہ ہے کہ ہم یہ کوشش کرتے ہیں کہ ایک مقدار کی نسبت کو دوسری مقدار کے ساتھ اعداد میں تعبیر کریں اور اس تعبیر کرنے میں خواہ ایک مقدار کو ہی دوسری مقدار کا اندازہ کرنے والا واحد مقرر کریں خواہ کسی تیسری مقدار کو اندازہ کرنیوالا واحد دونوں مقداروں کا مقرر کریں یہ ممکن نہیں کہ ہم کوئی پیمانہ واحد خواہ وہ کیسا ہی چھوٹا ہو اس صورت میں دریافت کر سکیں۔



ہم اس جگہ تشریحاً مربع ا ب ج د کے ضلع ا ب اور قطر ا ج کی مشورہ مثال بیان کریں گے۔ مربع کے قطر ا ج پر ا ف = ا ب کے نو اور ا ج پر عمود ح ی کیچو یہ ثابت ہو سکتا ہے

ب ی = ی ف = ف ج

اسلئے ج ف = ف ج - اب (۱)

ج ی = ج ب - ج ف (۲)

اب اگر اب اور ج دووں کسی محدود اکائی کی رقوم میں بیان ہو سکتے

ہوں تو ان میں سے ہر ایک اُس محدود اکائی کا صحیح ضعیف ہوگا۔ لیکن (۱)

سے ظاہر ہے کہ اگر ایسا ہو تو ج ف اسی اکائی کا صحیح ضعیف ہوگا اور نیز (۲)

سے ظاہر ہے کہ ج ی بھی اُس اکائی کا صحیح ضعیف ہوگا۔

اب ج ف اور ج ی بالترتیب مربع ج ف ی گ کا ضلع اور قطر ہیں اور اس

مربع کا ہر ایک ضلع مربع اب ج د کے نصف ضلع سے کم ہے اسلئے ظاہر ہے

کہ مربع ج ف ی گ سے ایک اور چھوٹا مربع حاصل ہو سکتا ہے جس کا ضلع اور

قطر دونوں اکائی مفروضہ کے صحیح اضعات ہوں اور علیٰ ہذا تقیاس حتیٰ کہ ہمیں

آتا چھوٹا مربع حاصل ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں مگر اس کا ضلع اور قطر دونوں

کسی ایک ہی محدود اکائی کے صحیح اضعات ہونگے اور یہ باطل ہے پس معلوم ہوا

کہ مربع کا ضلع اور قطر مقادیر متبائن ہیں اُن کا کوئی وفقی مشترک نہیں ہو سکتا۔

۱۱۔ اگرچہ دو ایسے اعداد صحیح نہیں معلوم ہو سکتے جو دو مقادیر متبائن کی

نسبت کو ٹھیک ٹھیک بیان کر سکیں۔ تاہم دو ایسے اعداد صحیح دریافت

ہو سکتے ہیں جن کی نسبت کا تفاوت نسبت مطلوبہ سے آتا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں

$$\text{مثلاً } \frac{55}{54} = \frac{26234046}{26234045} = 559.014 \dots$$

$$\text{اور اسلئے } \frac{55}{54} < \frac{559.014}{1.000000} \text{ اور } \frac{559.014}{1.000000} > \frac{55}{54}$$

پس نسبت ۵۵۹.۰۱۴ : ۱۰۰۰۰۰۰ اور ۵۵ : ۱۰۰۰۰۰۰

فرق ۱۰۰۰۰۰ سے کم ہے اگر تعداد اعشاریہ زیادہ لی جائے تو اس سے بھی اچھا تقریب حاصل ہو سکتا ہے۔

اس نتیجہ کی تقسیم اس طرح ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ دو مقادیر متباہن ہیں۔ مقدار $\frac{1}{b}$ کو m سادہ حصوں میں تقسیم کر دو جن میں سے ہر ایک حصہ $\frac{1}{b}$ کے برابر ہو پس $\frac{1}{b} = m \times \frac{1}{b}$ جہاں m مثبت صحیح ہے۔

نیز فرض کرو کہ $\frac{1}{a}$ مقدار $\frac{1}{b}$ میں n مرتبہ سے زیادہ اور $(n+1)$ مرتبہ سے کم دفعہ شامل ہے۔

$$\frac{1}{b} < \frac{n}{m} \text{ اور } \frac{n}{m} > \frac{(n+1)}{m}$$

یعنی $\frac{1}{b}$ مقدار $\frac{n}{m}$ اور $\frac{(n+1)}{m}$ کے درمیان واقع ہے اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{1}{b}$ اور $\frac{n}{m}$ کا حاصل تفریق ایک ایسی مقدار ہے جو کہ $\frac{1}{m}$ سے کم ہے اور چونکہ ہم $\frac{1}{b}$ کو (جو ہمارے ماننے والی اکائی ہے) اتنا چھوٹا منتخب کر سکتے ہیں جتنا چاہیں۔ اس لئے m اتنا بڑا بن سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اور دواویسے اعداد n اور m دریافت ہو سکتے ہیں جن کی نسبت $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ کی نسبت کو کسی مطلوبہ درجہ صحت تک بیان کرے۔

مثال۔ کسی مربع کا ضلع $\frac{1}{b}$ اور قطر $\frac{1}{a}$ ہے نسبت $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ کی منطق قیمت دریافت کرو جو ایک کے $\frac{1}{1000}$ دیں حصے تک صحیح ہو

اگر ہم اپنی اکائی $\frac{1}{b}$ کا $\frac{1}{1000}$ واں حصہ لیں۔

$$\frac{1}{b} = 1000 \text{ اور } \frac{1}{a} = 2000000$$

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = 2000$$

$$\text{اور } ۱۵۱۴ = ۲۰۰۲۲۲۵$$

$$\frac{۱۴۱۵}{۱۰۰۰} > \frac{۱}{۱} > \frac{۱۴۱۴}{۱۰۰۰}$$

$$\text{لیکن } \frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{۱۴۱۴}{۱۰۰۰} - \frac{۱۴۱۵}{۱۰۰۰}$$

$$\text{اسلئے } \frac{۱}{۱} = \frac{۱۴۱۴}{۱۰۰۰} \text{ اور غلطی } \frac{۱}{۱۰۰۰} \text{ سے کم ہے}$$

۷۔ اگر نسبتوں کے سب مقدموں کو آپس میں ضرب دیکر نیا مقدم بنائیں اور سب تالیوں کو ضرب دیکر ایک نئی تالی بنائیں تو جو نسبت اس جدید مقدم کو جدید تالی سے ہوگی اُسے نسبت مولفہ ان نسبتوں کی کہیں گے۔

مثال - نسبت مولفہ تین مفصلہ ذیل نسبتوں کی معلوم کرو -

$$۲ : ۳ :: ۱ : ۲ \quad ۵ : ۶ :: ۱ : ۲ \quad ۵ : ۶ :: ۱ : ۲$$

$$\text{نسبت مطلوبہ} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} = \frac{۵۰}{۱۰۸} = \frac{۲۵}{۵۴}$$

اگر نسبت ۱ : ۲ کی تالیف نسبت ۱ : ۲ سے کی جائے تو ۱ : ۲ پیدا ہوتی ہے اسے ۱ : ۲ کی نسبت مشتقہ کہتے ہیں۔

اسی طرح سے ۱ : ۲ کو نسبت مشتقہ ۱ : ۲ کی کہتے ہیں۔

نیز ۱ : ۲ کی نسبت جذبیہ ۱ : ۲ کی ہے

مثال ۱ - نسبت ۲ : ۳ کی نسبت مشتقہ ۴ : ۵ : ۶ : ۷ : ۸ : ۹ : ۱۰

۲ - نسبت ۴ : ۵ کی نسبت جذبیہ ۴ : ۵ ہے

۳ - نسبت ۲ : ۳ کی نسبت مشتقہ ۴ : ۵ : ۶ : ۷ : ۸ : ۹ : ۱۰

۸ - اگر کسی نسبت کا مقدم تالی سے بڑا ہو یا تالی کے برابر ہو یا تالی سے

چھوٹا ہو تو اس نسبت کو بالترتیب نسبت کبریٰ نسبت مساوات نسبت ضعیفی کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ۱ : ب کوئی نسبت مجوزہ ہے

اگر ۱ < ب تو ۱ : ب نسبت کبریٰ غیر متساوی ہے

اگر ۱ > ب تو ۱ : ب نسبت صغریٰ غیر متساوی ہے

اگر ۱ = ب تو ۱ : ب نسبت مساوات ہے

۹۔ اگر کسی نسبت کی تالیف کسی نسبت مساوی سے کی جائے تو اس میں

فرق نہیں آتا اور اگر نسبت کبریٰ سے کی جائے تو وہ نسبت بڑھ جاتی ہے اور

اگر نسبت صغریٰ سے کی جائے تو وہ نسبت گھٹ جاتی ہے

فرض کرو کہ ۱ : ب نسبت مجوزہ ہے

اگر اس کی تالیف ج : د سے کی جائے تو نسبت مولفہ ا ج : ب د ہوگی

۱ : ب < یا = یا > ا ج : ب د

بمطابق اس کے کہ $\frac{1}{b} < یا = یا > \frac{a}{b+d}$

" " $\frac{1}{b} < یا = یا > \frac{a}{b+d}$

" " $\frac{1}{b} < یا = یا > \frac{a}{b+d}$

" " $\frac{1}{b} < یا = یا > \frac{a}{b+d}$ جس سے دعویٰ ثابت ہے

۱۰۔ اگر ارقام نسبت پر ایک ہی مقدار زیادہ کر دی جائے تو نسبت کبریٰ

گھٹ جاتی ہے۔ اور نسبت صغریٰ بڑھ جاتی ہے۔

فرض کرو کہ نسبت مجوزہ $\frac{1}{b}$ ہے ارقام نسبت پر مقدار لازماً زیادہ کرنے سے

نئی نسبت پیدا ہوتی ہے۔

$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b+a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b-a}$

اور ۱ - ب نسبت ہے یا منفی بمطابق اس کے کہ ۱ بڑا ہے یا چھوٹا ہے ب سے

$$\begin{aligned} \text{اے اگر } \frac{1}{ب} < \frac{1}{ب} & \text{ تو } \frac{1}{ب} < \frac{1}{ب} \\ \text{اور اگر } \frac{1}{ب} > \frac{1}{ب} & \text{ تو } \frac{1}{ب} > \frac{1}{ب} \\ \text{جس سے دعویٰ ہمارا ثابت ہے} \end{aligned}$$

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ارقام نسبت سے ایک ہی مقدار منفی کر دی جائے تو نسبت کبیری بڑھ جاتی ہے اور نسبت صغریٰ گھٹ جاتی ہے
 ۱۱۔ جب دو یا زیادہ نسبتیں آپس میں برابر ہوں تو ان کو کسی ایک حرف کے سادی رکھنے سے کئی ایک کارآمد مسائل ثابت ہو سکتے ہیں۔ طریقہ عمل کی توضیح منسلک ذیل مسئلہ اعظم کے ثبوت سے ہوگی۔

$$\begin{aligned} \text{اگر } \frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} & \\ \text{تو ہر ایک نسبت} & \left(\frac{پ \text{ ان} + ق \text{ ج} + ر \text{ ع} + \dots}{پ \text{ ب} + ق \text{ د} + ر \text{ ف} + \dots} \right) \\ \text{فرض کر دو کہ } \frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} & = \frac{ک}{.....} \\ \text{تب } 1 = ب \text{ ک} = د \text{ ج} = ف \text{ ع} = ک & \text{ ف} \\ \text{اے } \frac{پ \text{ ان} + ق \text{ ج} + ر \text{ ع} + \dots}{پ \text{ ب} + ق \text{ د} + ر \text{ ف} + \dots} & \end{aligned}$$

$$\frac{پ \text{ ب} + ق \text{ د} + ر \text{ ف} + \dots}{پ \text{ ب} + ق \text{ د} + ر \text{ ف} + \dots} = \frac{ک}{.....}$$

$$\text{اے } \left(\frac{پ \text{ ان} + ق \text{ ج} + ر \text{ ع} + \dots}{پ \text{ ب} + ق \text{ د} + ر \text{ ف} + \dots} \right) = \frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ف} = \frac{ک}{.....}$$

پ و ق و ر و ن کو مختلف قیمتیں دینے سے اس مسئلہ عامہ سے کئی خاص صورتیں مستنبط ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ مندرجہ بالا ترکیب کے استعمال سے ثابت ہو سکتی ہیں

$$\text{مثلاً اگر } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ن} = \dots\dots\dots$$

$$\text{تو ان میں سے ہر ایک نسبت} = \frac{ا + ج + ع + \dots\dots\dots}{ب + د + ن + \dots\dots\dots}$$

یہ نتیجہ نہایت کارآمد ہے اس کا لفظی قایم مقام مندرجہ ذیل ہے "اگر کسر متساویہ کا کوئی سلسلہ ہو تو اس سلسلہ کی ہر ایک کسر ایک ایسی کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ تو سب شمار کنندوں کا حاصل جمع ہو اور جس کا نسب نما تمام نسب نمایوں کے حاصل جمع کے برابر ہو۔"

$$\text{مثال ۱۔ اگر } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ن} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{ا^۳ ب + ۲ ج^۲ د - ع^۱ ا^۳ ن}{ب^۴ + ۲ د^۲ ن - ۳ ب^۳ ن} = \frac{ا ج ع}{ب د ن}$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ن} = ک$$

$$ب = \frac{ا}{ک} = ب ک = ج = د ک اور ع = ن ک$$

$$\frac{ا^۳ ب + ۲ ج^۲ د - ع^۱ ا^۳ ن}{ب^۴ + ۲ د^۲ ن - ۳ ب^۳ ن}$$

$$= \frac{ب^۲ ک^۳ + ۲ د^۲ ن ک^۳ - ۳ ب^۳ ن ک^۳}{ب^۴ + ۲ د^۲ ن - ۳ ب^۳ ن}$$

$$= ک^۳ = \frac{ا}{ب} \times \frac{ج}{د} \times \frac{ع}{ن} = \frac{ا ج ع}{ب د ن}$$

$$\text{مثال ۲۔ اگر } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ی}{ج} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{ا^۲(ب+ج) + ۲(ا+ب+ج) + ۲(ا+ب+ج)}{ا+ب+ج} = \frac{ا^۲(ب+ج) + ۲(ا+ب+ج) + ۲(ا+ب+ج)}{ا+ب+ج}$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ی}{ج} = ک$$

اسلئے لا = وک کو ما = ب ک کو ی = ج ک

$$\frac{1(1+2)}{1+ک} = \frac{1ک+2}{1+ک} = \frac{1+2}{1+ک}$$

$$\text{اسلئے } \frac{1+2}{1+ک} + \frac{2+1}{1+ب} + \frac{1+2}{1+ج} =$$

$$\frac{1(1+2)}{1+ک} + \frac{2(1+1)}{1+ب} + \frac{1(1+2)}{1+ج} =$$

$$\frac{(1+2)(1+ب+ج)}{1+ک} =$$

$$\frac{ک^2(1+ب+ج) + (1+ب+ج)^2}{ک(1+ب+ج) + (1+ب+ج)} =$$

$$\frac{(ک+1+ب+ج)(ک+1+ب+ج)}{(ک+1+ب+ج)(ک+1+ب+ج)} =$$

$$\frac{(1+2)(1+ب+ج) + (1+2)(1+ب+ج)}{1+2+1+ب+ج+1+ب+ج} =$$

۱۲۔ اگر کوئی مساوات بلحاظ چند مقادیر کے متجانس ہو تو اس مساوات میں ان مقادیر کی جگہ ان کے متناسب رکھے جاسکتے ہیں۔

مثلاً مساوات ل لا^۳ ما + م لا^۲ ما^۲ ی + ن ما^۲ ی = بلحاظ لا و ما دی کے متجانس ہے فرض کرو کہ ان کی متناسب میں مقادیر بالترتیب ع و ب ہیں۔

$$\frac{ع}{ب} = \frac{لا}{ب} = \frac{لا}{ع} = \frac{لا}{ع}$$

= مجموعہ شمار کنندوں کا
مجموعہ نسب ناموں کا

$$(۲) \quad \frac{لا (ا + ی) + با (ی + لا) + می (لا + ا)}{۲ لا + ۲ با + ۲ می} =$$

اسلئے (۱) اور (۲) سے

$$\frac{لا + با + می}{ا + ب + ج} = \frac{لا (ا + ی) + با (ی + لا) + می (لا + ا)}{۲ (لا + با + می)}$$

مثال ۲- اگر $\frac{لا}{ل} = \frac{م}{ن} = \frac{با}{ج}$ (م ب + ن ج - ل و) = م (ن ج + ل و - م ب)

$$= \frac{ن (ل و + م ب - ن ج)}{م}$$

تو ثابت کر دو کہ $\frac{ل}{لا (ب + م ج - و لا)} = \frac{ن}{ما (ج ی + و لا - ب ما)}$

$$= \frac{ن}{ی (و لا + ب ا - ج ی)}$$

یہیں معلوم ہے کہ $\frac{ل}{م} = \frac{ن}{ج} = \frac{با}{ا}$ $\frac{ل}{م} = \frac{ن}{ج} = \frac{با}{ا}$ $\frac{ل}{م} = \frac{ن}{ج} = \frac{با}{ا}$ $\frac{ل}{م} = \frac{ن}{ج} = \frac{با}{ا}$

$$= \frac{\frac{ل}{م} + \frac{ن}{ج}}{ل و} = \frac{ن (ل و + م ب - ن ج)}{م}$$

$$= \frac{ن (ل و + م ب - ن ج)}{م} = \frac{ل (ی + ن لا)}{ب} = \frac{ن (ا + م ی)}{ا}$$

مندرجہ بالا کسور میں سے اول کو اوپر اور نیچے لا سے ضرب دو۔ دوم کو ما سے اور

سوم کو ی سے تب

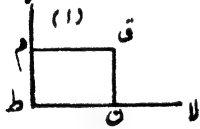
$$\frac{ن لا + م لای}{لا} = \frac{ل مای + ن لاا}{ب} = \frac{م لای + ل مای}{ج ی}$$

$$= \frac{\text{ب} + \text{ا} + \text{ج} - \text{ی} - \text{لا}}{\text{ل} + \text{ما} - \text{ی}} = \text{دو متشابہ جملے}$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ل}}{\text{ب} + \text{ا} + \text{ج} - \text{ی} - \text{لا}} = \frac{\text{م}}{\text{ا} + \text{ج} - \text{ی} + \text{لا} - \text{ب} + \text{ا}} = \frac{\text{ن}}{\text{ا} + \text{ج} - \text{ی} + \text{لا} + \text{ب} - \text{ا} - \text{ج} - \text{ی}}$$

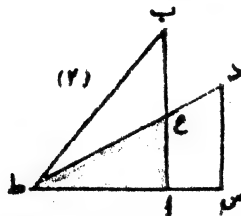
نسبت کی ترقیمی تعبیر

۱۵۔ فرض کرو کہ شکل منسلک (۲) میں نقطہ ط لا نسبت مجوزہ کی نمائی کو تعبیر کرتا ہے اور معین لا ب مقدم نسبت کہ اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے زاویہ ط ب کی مقدار سے اس بات کا اندازہ ہو سکتا ہے کہ نسبت مجوزہ کسی دوسری نسبت سے جو کہ اُسی طرح سے تعبیر کی گئی ہو بڑی ہے یا چھوٹی۔



نوٹ۔ سطح مستوی میں دو خطوط ط لا اور ط ما متقاطع علی التوائم کو فرض کرو کہ لا متوازی الاضلاع ہے اور ط ما اُس پر عمود ہے ط لا کو محور لا اور ط ما کو محور ما

کہتے ہیں اب کسی نقطہ ق سے محوروں کے متوازی خطوط ق م اور ق ن کھینچو ق م کو فصلہ نقطہ ق اور ق ن کو معین نقطہ ق کہتے ہیں۔



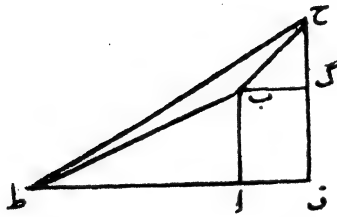
فرض کرو کہ $\frac{\text{دس}}{\text{طس}}$ دوسری نسبت ہے۔ اگر ط د اور لا ب

ع پر قطع کریں۔ تو متشابه مثلثوں ع ا ط اور د س ط سے

$$\frac{د س}{ط س} = \frac{ع ا}{ط ا} \text{ اسلئے معلوم ہوا کہ } \frac{ع ا}{ط ا} \text{ سے بھی دوسری نسبت}$$

تعبیر ہو سکتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ نسبتوں کا مقابلہ طول ا ب اور ا ع سے ہو سکتا ہے۔

اگر نسبت صغریٰ غیر متساوی کی دونوں رقوم پر ایک ہی مقدار زیادہ کر دی جائے تو یہ نسبت بڑھ جاتی ہے



بوجب سابق فرض کرو کہ $\frac{ا ب}{ط ا}$ نسبت مجوزہ کو تعبیر کرتی ہے ط ا کو نقطہ ف تک بڑھاؤ اور ایک معین ف گ ح اس طرح کھینچو کہ ف گ = ا ب اور گ ح = ا ف ایسا کرنے سے ہم نے نسبت $\frac{ا ب}{ط ا}$ کی دونوں رقوم پر مقدار ح گ یا ا ف زیادہ کر دی ہے

نئی نسبت $\frac{ح ف}{ط ف} <$ پرانی نسبت سے اگر ط ح اور ا ب نقطہ ب کے اوپر تقاطع کریں یعنی زاویہ ح ب گ < زاویہ ب ط ا ہو لیکن ح ب گ = ۹۵

اسلئے نئی نسبت < اصلی نسبت سے اگر زاویہ ب ط ا > ۹۵

یعنی اگر نسبت $\frac{ا ب}{ط ا}$ نسبت صغریٰ غیر متساوی ہو

نوٹ۔ علم مثلث میں نسبت $\frac{۵}{۴}$ کو مماس زاویہ لاط ب کہتے ہیں علم ریاضی کی کئی کتابوں میں اس نسبت کو خط مستقیم ط ب کے سیلان سے تعبیر کرتے ہیں۔

۱۶۔ فارین ہیت پیمانہ کی تحویل سنٹی گریڈ پیمانہ میں اور برعکس اسکے۔

فارین ہیت مقیاس الحرارة میں نقطہ انجماد کا نشان ۳۲° پر ہوتا ہے اور نقطہ غلیان کا ۲۱۲° پر سنٹی گریڈ مقیاس الحرارة میں یہی نقاط بالترتیب ۵۰° اور ۱۰۰° پر منقوش ہوتے ہیں۔ اگر کوئی درجہ حرارت فارن ہیت پیمانے پر ف سے تعبیر ہو اور سنٹی گریڈ پر س سے تو ہم ان کا مقابلہ یکہ دیکھنے سے کر سکتے ہیں کہ نقطہ انجماد سے درجہ حرارت معلومہ اور نقطہ غلیان کے ابعاد باہم وہی نسبت رکھتے ہیں خواہ کوئی سا پیمانہ لیا جائے۔

$$\text{پس } \frac{۳۲ - ۲۱۲}{۳۲ - ۲۱۲} = \frac{\text{ف} - ۳۲}{\text{س} - ۳۲} = \frac{\text{بعد نقطہ غلیان کا نقطہ انجماد سے}}{\text{بعد درجہ حرارت معلومہ کا نقطہ انجماد سے}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ف} - ۳۲}{۱۸۰} = \frac{\text{س} - ۳۲}{۱۰۰} \quad \text{اسلئے } \frac{\text{ف} - ۳۲}{۹} = \frac{\text{س} - ۳۲}{۵} \quad (۱)$$

طالب علم کو چاہئے کہ مربع دار کا غز پر مساوات (۱) کی ترسیم بنائے۔
مثال ۱۔ اگر $\frac{۶۳ - ۷۷}{۶۳ + ۷۷} = \frac{۲۹}{۳۳}$ تو نسبت لا: ما دیافت کرو۔

$$۳۳(۶۳ - ۷۷) = ۲۹(۶۳ + ۷۷)$$

$$۶۱۱۴ - ۷۷۳۱ = ۲۹۹۰ + ۲۲۱۳$$

$$۶۲۱۵ = ۷۸۴۳$$

$$\therefore \frac{۲۱۵}{۸۶} = \frac{۵}{۲}$$

$$\therefore \frac{۵}{۲} = \frac{۲۱۵}{۸۶} = \frac{۵}{۲}$$

مثال ۲۔ اگر ۲ لا - ۵ لا + ۲ ما = ۰ تو نسبت لا : ما دریافت کرو۔

$$۲ - \left(\frac{۵}{۲}\right) - ۵ + ۲ = ۰ \quad \text{ہاں سے (۲) سے ضرب کیا۔}$$

مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{۵}{۲} = ۲$ یا $\frac{۱}{۲}$

مثال ۳۔ کونسی نسبت بڑی ہے لا + ما : لا + ما یا لا - ما : لا - ما۔

اس جگہ لا اور ما دونوں مثبت ہیں۔

$$\frac{لا + ما - لا - ما}{لا + ما} = \frac{لا - ما}{لا - ما} = \frac{(لا + ما)(لا - ما) - (لا - ما)(لا + ما)}{(لا - ما)(لا + ما)}$$

$$= \frac{لا ما - لا ما - لا ما + لا ما}{لا + ما} = \frac{لا ما - لا ما - لا ما + لا ما}{لا + ما} = \frac{لا ما - لا ما - لا ما + لا ما}{لا + ما}$$

اب لا اور ما دونوں مثبت ہیں اسلئے ضرور ہے کہ $\frac{لا ما - لا ما - لا ما + لا ما}{لا + ما}$ منفی ہو

پس لا + ما : لا - ما > لا - ما : لا - ما اگر میں معمول بقاؤں سے

۱۷۔ ضرب چلیا پائی۔ اگر دو مساوات درجہ دوم تین مقادیر محبوب

کی معلوم ہوں جیسے کہ درجہ دوم مساواتیں

$$(۱) \quad لا + ب : ما + ج = ۰$$

$$(۲) \quad لا + ب : ما + ج = ۰$$

تو ہم انکا مکمل حل دریافت نہیں کر سکتے لیکن لگی اور لگی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر مساوات اول کو ب سے اور مساوات دوم کو ب سے ضرب

دید می جائے تو

$$\frac{ب}{ب} + \frac{لا}{ب} + \frac{ب}{ب} + \frac{ب}{ب} + \frac{ج}{ج} = ی$$

$$\frac{ب}{ب} + \frac{لا}{ب} + \frac{ب}{ب} + \frac{ب}{ب} + \frac{ج}{ج} = ی$$

$$\text{تقریبی سے لا} (\frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب}) + ی (\frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب}) = (ج - ب)$$

$$\therefore لا (\frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب}) = ی (\frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب})$$

$$\therefore \frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب} = \frac{ی}{ی} \quad (۳)$$

$$\text{یعنی } \frac{لا}{ی} = \frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب}$$

مساوات معلومہ سے اگر لا کو سا قط کر دیا جائے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{ی}{ب} - \frac{ب}{ب} = \frac{لا}{ی} \quad (۴)$$

اس سے ہمیں نسبت $\frac{ی}{ب}$ حاصل ہوئی نتائج (۳) اور (۴) کو باقرینہ مرتب کرنے سے

$$\frac{ب}{ب} - \frac{ب}{ب} = \frac{لا}{ی} = \frac{ج}{ج} - \frac{ب}{ب} \quad (۵)$$

اس سے ظاہر ہے کہ جب کبھی دو مساواتیں بشکل (۱) اور (۲) معلوم ہوں

تو قاعدہ مندرجہ ذیل کی استغانت سے ہم نسبت لا : ب : ی کو مساوات کے

سرور کی رقوم میں باسانی لکھ سکتے ہیں۔

ما کے سر سے شروع ہو کر لا و ما و ی کے سرور کو بالترتیب لکھ جاؤ اور انہیں

اس طرح پر کر لکھو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔

$$\text{اسلئے } \frac{لا}{۱۲۵} = \frac{۱۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\text{یعنی } \frac{لا}{۱۲۵} = \frac{۱۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

مثال ۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$(۱) \dots\dots\dots ۰ = لا + ب + ما + ج ی$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۰ = لا + ما + ی$$

$$(۳) \dots\dots\dots ب ج لا + ج لا + ما + لا ب ی = (ب - ج) (ج - لا) (ج - ب) (ب - لا) (ب - ج) (ج - لا)$$

(۱) اور (۲) سے بموجب قاعدہ ضرب چلیپائی

$$ب - ج = \frac{لا}{ج} = \frac{۱۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰} = \frac{ی}{ب} \quad \text{ک} \quad \text{(فرض کرو)}$$

$$\text{اسلئے } لا = (ب - ج) ک = (ج - لا) ک = دی = (لا - ب) ک$$

(۳) میں یہ قیمتیں رکھنے سے

$$ک \{ ب ج (ج - ب) + ج لا (ج - لا) + لا ب (ب - لا) \} =$$

$$= (ب - ج) (ج - لا) (ج - ب) (ب - لا) (ب - ج) (ج - لا)$$

$$ک \{ (ب - ج) (ج - لا) (ج - ب) \} = (ب - ج) (ج - لا) (ج - ب) (ب - لا) (ب - ج) (ج - لا)$$

ب - ج = لا - ب

$$\text{جس سے } لا = ج - ب = لا - ج دی = ب - لا$$

۱۸۔ اگر دفعہ ۱۰ میں ی = ۱ لی جائے تو مساوات (۱) اور (۲) بنجائی

$$۰ = لا + ب + ما + ج$$

$$۰ = لا + ب + ما + ج$$

اور نتیجہ (۵) سے حاصل ہوگا

$$\frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج}$$

$$\frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج}$$

اسلئے ظاہر ہے کہ دو ہمزاد مساواتیں درجہ اول دو مقادیر مجہول کی قاعدہ ضرب چلیبانی سے حل ہو سکتی ہیں۔

مثال - حل کرو $۵ لا - ۳ ما - ۱ = ۰$ اور $۲ لا + ۲ ما = ۱۲$

عمل نقل سے $۵ لا - ۳ ما = ۱ - ۰$

$۵ لا + ۲ ما = ۱۲ - ۰$

$\frac{۱}{۳+۱۰} = \frac{۵}{۹+۱۰} = \frac{۱۱}{۲+۳۹}$

جس سے $\frac{۵۹}{۱۳} = ما$ اور $\frac{۳۸}{۱۳} = لا$

۱۹۔ بالعموم تین مقادیر مجہول کے اسقاط کے لئے چار مساوات کی ضرورت ہوگی۔ لیکن مفصلہ ذیل تین مساواتوں سے لاکھا ما کا ہی تین مقادیر کو ساقط کرنا ممکن ہے کیونکہ یہاں درحقیقت صرف دو نسبتوں کو ساقط کرنا مطلوب ہے۔

(۱) $لا + ب + ما + ج ی = ۰$

(۲) $لا + ب + ما + ج ی = ۰$

(۳) $لا + ب + ما + ج ی = ۰$

مساوات (۱) اور (۲) سے

$\frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج} = \frac{ب ج - ب ج}{ب ج - ب ج}$

(۳) میں لاکھی جگہ (ب ج - ب ج) ک اور ما اور ی کی جگہ مشابہ

جملات رکھنے سے اور ک پر تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا
 $\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \dots =$
 اس ارتباط کو معادلات معلومہ کا حاصل استقاط کہتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۱

۱۔ مربع دار کاغذ استعمال کرنے سے نسبت $\frac{11}{9}$ کا
 نسبت $\frac{14}{11}$ د $\frac{6}{8}$ د $\frac{12}{13}$ د $\frac{4}{11}$ د $\frac{33}{52}$ سے مقابلہ کرو
 [نقاط (۰، ۰) و (۱۹، ۱۱) کو خط مستقیم سے ملاؤ۔ اور اس خط کو خارج کرو
 اور دیکھو کہ نقاط (۳۰، ۱۷) وغیرہ اس خط سے اوپر ہیں یا نیچے۔]
 ۲۔ مربع دار کاغذ پر نسبت $\frac{3}{5}$ د $\frac{5}{9}$ د $\frac{4}{11}$ کو تعبیر کرو اور دیکھو کہ انہیں
 سے کون سی سب سے بڑی ہے اور کون سی سب سے چھوٹی۔
 ۳۔ نسبت $\frac{15}{14}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما پر ۶ زیادہ کرنے سے جو نئی
 نسبت پیدا ہوتی ہے اسکو خانہ دار کاغذ پر کھینچو اور اس کا مقابلہ نسبت $\frac{15}{14}$
 سے کرو۔

۴۔ ۲ پونڈ ۶ اونس کی نسبت ۳ پونڈ ۹ اونس کیساتھ دریافت کرو
 ۵۔ ۲ پونڈ ۵ شلنگ ۶ پنس کی نسبت ۴ پونڈ صفر شلنگ ۶ پنس کے
 ساتھ دریافت کرو۔

۶۔ نسبت مولفہ دریافت کرو

۱۔ نسبت ۳:۵ ب اور نسبت مشابہ ۵:۲ ب کی

۲۔ نسبت خذریہ ۶۴:۹ اور نسبت ۲۷:۵ کی

۳۔ نسبت مشابہ $\frac{1}{2}$ ب: $\frac{1}{4}$ ب اور نسبت ۳:۵ لا: ۲ ب کی

۷۔ اگر لا + ۷ : ۲ (لا + ۱۳) نسبت منشاء ۵ : ۸ کی ہو تو لا معلوم کرو

۸۔ دو ایسے اعداد دریافت کرو جن کی نسبت ۷ : ۱۲ ہو اور جن میں سے بڑے کی زیادتی چھوٹے پر ۷۷۲ ہو۔

۹۔ نسبت ۵ : ۳ کی ہر ایک رقم پر کیا عدد زیادہ کر دیا جائے کہ یہ نسبت ۱ : ۳ کے برابر ہو جائے؟

۱۰۔ اگر لا : ۷ = ۳ : ۴ تو نسبت ۷ : لا - ۴ : ۷ : لا + ۷ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۱۔ اگر ۱۵ (۳ لا - ۷) = لا تو نسبت لا : ۷ دریافت کرو۔

۱۲۔ اگر $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ق}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{۳ا + ۲ب + ۳ج + ۲د + ۳ع}{۲ب} = \frac{۳ا + ۲ب + ۳ج + ۲د + ۳ع}{۲ب}$$

$$(۲) \frac{۲ا + ۳ج + ۲ع}{ب + ۳د + ۲ق} = \frac{۲ا + ۳ج + ۲ع}{ب + ۳د + ۲ق}$$

$$(۳) \frac{۲ا}{ب} = \frac{۲ا + ۳ج + ۲ع - ۲ق}{۲ب + ۳د + ۲ق - ۲ق}$$

۱۳۔ اگر $\frac{1}{لا + ۱} = \frac{ب}{۱ - ی} = \frac{ج}{ی + لا}$ تو ثابت کرو کہ ۱ = ب + ج

۱۴۔ اگر $\frac{1}{ب} = \frac{پ}{ج} = \frac{ج}{د}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{د}$ برابر ہے

$$\frac{۳ا + ۲ب + ۳ج + ۲د + ۳ع}{۲ب + ۳د + ۲ق}$$

۱۵۔ اگر $\frac{ق}{۱} + \frac{ر}{پ} = \frac{ق}{۱} + \frac{ر}{پ} = \frac{ق}{۱} + \frac{ر}{پ}$

تو ثابت کرو کہ (ق - ر) لا + (پ - ر) م + (پ - ق) ی = ۰

۱۶ - ۱ کی عمر کی نسبت ب کی عمر سے ۵ : ۳ ہے ۲۸ سال ہوئے یہی نسبت ۴ : ۱ تھی لو کی عمر دریافت کرو۔

۱۷ - اگر $\frac{لا}{ی} = \frac{لا + م}{ی} = \frac{لا}{ی}$ تو نسبت لا : م : ی دریافت کرو۔

۱۸ - اگر $\frac{پ + م}{ق + ج} = \frac{پ + ی}{ق + لا} = \frac{پ + لا}{ق + ب}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{(پ + م + ی) + (ق + لا + ب)}{ب + ج + لا + اب} = \frac{(پ + م + ی) + (ق + لا + ب)}{ب + ج + لا + اب}$

۱۹ - اگر $\frac{لا}{ب} = \frac{ی}{ج}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{لا + م}{لا + ب} + \frac{لا + م}{لا + ب} = \frac{لا + م}{لا + ب}$

$\frac{لا + م}{لا + ب} + \frac{لا + م}{لا + ب} = \frac{لا + م}{لا + ب}$

۲۰ - اگر $\frac{لا + م}{ب} = \frac{ی + م}{ب} = \frac{لا + م}{ب}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{لا + م}{ب} = \frac{ی + م}{ب} = \frac{لا + م}{ب}$

۲۱ - اگر $(لا + ب + ج) : (لا + م + ی) = (لا + ب + ج) : (لا + م + ی)$

تو ثابت کرو کہ لا : م : ب = ی : ج

۲۲ - اگر ل (م + م + ن - ی - ل) = م (ن + ی + ل - لا - م)

= ن (ل + لا + م - ن - ی) تو ثابت کرو کہ

$\frac{لا + م - ی}{ل} = \frac{ی + لا - م}{م} = \frac{لا + م - ی}{ن}$

۳۳۔ ثابت کرو کہ معادلات

$$\begin{aligned} ۱ + لا + ج + ما + ب + ی &= ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \\ ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \\ ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \end{aligned}$$

۳۴۔ لا و ما دی کو معادلات

$$\begin{aligned} ۱ + لا + ج + ما + ب + ی &= ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \\ ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \quad ۰ = ۰ \end{aligned}$$

۳۵۔ اگر لا = ج + ما + ب + ی و ما = لا + ج + ی = ب + لا + ما

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱-۱} \\ ۳۶۔ معلوم ہے (۱ + ما + ی) = لا + ب (ی + لا) = ما \end{aligned}$$

اور ج (لا + ما) = ی

ثابت کرو کہ ب ج + ج + لا + ب + ۲ + ب ج = ۱

$$۳۷۔ \frac{۱}{ب} + \frac{ج}{د} + \frac{ع}{ف} = \frac{۱}{ب} + \frac{ج}{د} + \frac{ع}{ف}$$

تو نسبت $\frac{۱}{ب} + \frac{ج}{د} + \frac{ع}{ف}$ ان میں سے کسی ایک نسبت کے برابر ہے۔
[ا و ج و ع کو معین اور ب و د و ف میں سے ہر ایک کو منفصلہ بناؤ]

۳۸۔ عمل ریسی سے ثابت کرو کہ اگر $\frac{۱}{ب} + \frac{ج}{د} + \frac{ع}{ف}$ غیر متساوی

نسبتیں ہوں تو $\frac{۱}{ب} + \frac{ج}{د} + \frac{ع}{ف}$ ان میں سے سب سے بڑی اور سب سے

چھوٹی نسبت کے درمیان واقع ہوگی۔

ذیل کی مساواتوں کے معادلات ذیل کو حل کرو

$$۲۹ - ۱۳ - ۶۲ + ۷ = ۰$$

$$۰ = ۲ - ۶ - ۱۳$$

$$۱۸ = ۳ - ۲ + ۷$$

$$۳۰ - ۱۱ = ۶ + ۷$$

$$۰ = ۱۷ + ۲۶ - ۱۳$$

$$۱۶۷ = ۲ + ۳ + ۷$$

$$\checkmark \left\{ \begin{array}{l} ۳۱ - ۷ = ۳ + ۱۱ + ۲ \\ ۲۱ - ۷ = ۳ - ۱۱ + ۲ \end{array} \right.$$

$$۱۹ = ۳ + ۲ + ۷$$

$$۳۲ - ۳ - ۲ - ۷ = ۵$$

$$۰ = ۱۵ - ۲ - ۳ - ۷$$

$$۷ = ۷ + ۲ - ۱۱$$

$$۳۳ - اگر \frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} + \frac{۳}{۱۱} = \frac{۴}{۱۱}$$

$$۰ = \frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{۱۱} + \frac{۳}{۱۱} = \frac{۴}{۱۱}$$

$$تو ثابت کرو کہ \frac{۱}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱} + \frac{۳}{۱۱} = \frac{۴}{۱۱}$$

$$\frac{۱}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱} + \frac{۳}{۱۱}$$

ذیل لایحه معادلات ذیل کو حل کرو

۳۴ - $\begin{aligned} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = \text{ی} \\ & \text{ب} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ما} + \text{ا} + \text{ب} = \text{ی} \end{aligned}$

۳۵ - $\begin{aligned} & \text{لا} + \text{ما} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ی} \\ & \text{ا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} = \text{ی} \end{aligned}$

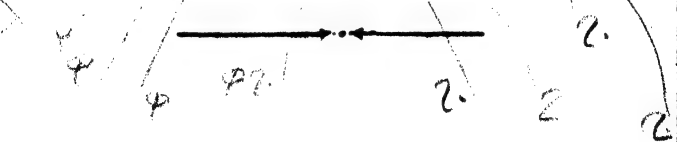
۳۶ - اگر $\text{ا} + \text{ما} + \text{ی} = \text{لا} + \text{ب} + \text{ری} = \text{ما} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ما} = \text{ی}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب} + \text{ج}} = \frac{\text{ما}}{\text{ب} + \text{ج} + \text{ا}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج} + \text{ا} + \text{ب}}$

۳۷ - اگر $\text{ا} + \text{لا} + \text{ح} + \text{ما} + \text{گ} = \text{ی}$ اور $\text{گ} + \text{لا} + \text{ن} + \text{ما} + \text{س} = \text{ی}$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{\text{ا}}{\text{ب} + \text{س} + \text{ن}} = \frac{\text{ما}}{\text{س} + \text{ا} + \text{گ}} = \frac{\text{ی}}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}}$

(۲) $\frac{\text{ب} + \text{س} + \text{ن}}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}} = \frac{\text{س} + \text{ا} + \text{گ}}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}} = \frac{\text{ن} + \text{ا} + \text{ح}}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}}$



باب دوم

متناسب

۲۰۔ جب دو نسبتوں میں ربط مساوات ہو تو چار مقادیر کو جو ان میں شامل ہوں متناسب کہتے ہیں مثلاً اگر $\frac{1}{ب} = \frac{ج}{د}$ تو $ا : ب :: ج : د$ کو متناسب کہیں گے۔ اس ربط کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ $ا$ کو $ب$ سے وہی نسبت ہے جو $ج$ کو $د$ سے ہے اور یہ متناسب اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$ا : ب :: ج : د$$

$$یا ا : ب = ج : د$$

$ا$ اور $د$ کو طرفین متناسب اور $ب$ اور $ج$ کو وسطین متناسب کہتے ہیں اور $ا$ و $ج$ یعنی نسبتوں کے مقدموں کو نظیرہ ایک دوسرے کا اور $ب$ و $د$ یعنی تالیوں کو نظیرہ ایک دوسرے کا کہتے ہیں۔

۲۱۔ اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو حاصل ضرب طرفین = حاصل ضرب وسطین۔ فرض کرو کہ $ا : ب :: ج : د$ متناسب ہیں

$$بوجب تعریف \frac{1}{ب} = \frac{ج}{د}$$

دونوں طرف $ب$ د میں ضرب دینے سے $ا = د = ب ج$

پس ظاہر ہے کہ اگر کسی تناسب کی تین رتیں معلوم ہوں تو چوتھی رقم معلوم ہو سکتی ہے۔

$$\text{مثلاً اگر } a : b :: c : d \text{ معلوم ہوں تو } b = \frac{a \times d}{c}$$

بالعکس اس کے اگر چار مقادیر a, b, c, d ایسی ہوں کہ $a : b :: c : d$ ہو تو $a : b :: c : d$ متناسب ہونگی اور ان میں سے a اور d طرفین اور b و c وسطین ہونگی یا برعکس اس کے۔

مثال - فرض کرو کہ تناسب کی پہلی تیسری چوتھی رتیں بالترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ہیں۔ اگر a سے دوسری رقم کو تعبیر کریں۔ تو $a : \frac{1}{2} :: \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

$$\text{جس سے } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = a \times \frac{1}{4}$$

$$\text{یعنی } a = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{2}{3}$$

۲۲۔ تعریف - مقادیر متناسب مسلسل میں کہلاتی ہیں اگر پہلی کو دوسری سے دہی نسبت ہو جو دوسری کو تیسری سے اور تیسری کو چوتھی سے ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

مثلاً $a : b :: c : d$ متناسب مسلسل میں ہونگی اگر

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

اگر تین مقادیر متناسب مسلسل میں ہوں تو

$$a : b :: b : c$$

اس صورت میں b کو وسط متناسب اور a و c کو a اور b کا

منانث متناسب کہتے ہیں

اگر اوب ج و د تناسب مسلسل میں ہوں تو ب و ج کو د اور د کی اوسط تناسب کہیں گے وغیرہ وغیرہ
 ۲۔ تناسب مسلسل میں مقادیر کے ارتباطات
 اگر تین مقادیر اوب ج و د تناسب مسلسل میں ہوں تو

$$ا : ج = ا : ب = ب : ج \text{ اور } ب = \frac{ا \times ج}{ب}$$

اگر چار مقادیر اوب ج و د تناسب مسلسل میں ہوں تو

$$ا : ب = ب : ج = ج : د = د : ا \text{ اور } ب = \frac{ا \times ج}{د}$$

$$\text{اور } ب = \frac{ا \times ج}{د} = \frac{ا \times ج}{د} = \frac{ا \times ج}{د} \text{ کیونکہ اگر } ا : ب = ب : ج$$

$$\text{تو } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$$

$$\text{اس لئے } \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج} \times \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ج}$$

$$\text{جس سے } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ج} \text{ (۱) نیز } ا : ج = ب : ج$$

$$\text{جس سے } ب = \frac{ا \times ج}{ب} \text{ (۲)}$$

مسادات (۱) اور (۲) سے دو مسائل مندرجہ بالا ثابت ہو گئے۔

نیز اگر ا : ب = ب : ج = ج : د

$$\text{تو } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \frac{ا}{د}$$

$$\text{نیز } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ج}$$

$$\text{اسلئے } \frac{ج}{د} \times \frac{ب}{ج} \times \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ب} \times \frac{ا}{ب} \\ \frac{ا}{د} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ب}{ب} \text{ یعنی } \frac{ا}{د} = \frac{ا}{ب}$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{ج}{د} = \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{د}$$

$$\text{نیز چونکہ } \frac{ا}{د} = \frac{ا}{ب} \text{ اسلئے } ب = د$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{ج}{د} = \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{د}$$

$$\text{نیز چونکہ } \frac{ج}{د} = \frac{ا}{ب}$$

$$ج = د$$

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{ج}{د} = \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ب} = \frac{ا}{د}$$

نتیجہ (۲) سے ظاہر ہے کہ دو مقادیر ۱ اور ج کے درمیان وسط تناسب کا معلوم کرنا استخراج جذر پر موقوف ہے۔

مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان وسط تناسب ہے

$$۱۶۴۱۳۲ = \sqrt[۲]{۱۶۴۱۳۲} = \sqrt[۲]{(۲ \times ۱)}$$

نیز نتائج (۴) اور (۵) کی مدد سے ہم دو معین مقادیر کے درمیان چند جذور الکعب نکالنے سے دو اوساط تناسب مندرج کر سکتے ہیں۔

مثلاً ۱ اور ۲ کے درمیان دو اوساط تناسب ہیں۔

$$۱۶۲۵۹۹ = \sqrt[۳]{۱۶۲۵۹۹} = \sqrt[۳]{(۲ \times ۱)}$$

$$۱۶۵۸۶۴ = \sqrt[۴]{۱۶۵۸۶۴} = \sqrt[۴]{(۲ \times ۱)}$$

۴۔ اگر ۱ : ب = ج : د اور ع : ف = گ : ہ

تو ا : ع : ب : ف = ج : گ : د : ہ

$$\text{چونکہ } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ اور } \frac{ج}{ن} = \frac{ع}{ہ} \\ \text{اسلئے } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ہ}$$

یا ا : ع : ب : ف = ج : گ : د : ہ

نتیجہ صریح - اگر ا : ب = ج : د

اور ب : لا = د : ما

تو لا : لا = ج : حا

۲۵ - اگر چار مقادیر ا د ب ج د د مناسب ہوں تو اُن سے کئی اور تناسبات خواص کسور کے استعمال سے مستنبط ہو سکتے ہیں - اور ان میں سے اکثر منسلک اصطلاحات ہندیہ سے نامزد ہوتے ہیں

(۱) اگر ا : ب = ج : د

تو ب : ا = د : ج [عکس نسبت]

$$\text{کیونکہ } \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ اسلئے } ۱ \div \frac{ا}{ب} = ۱ \div \frac{ج}{د}$$

$$\text{یعنی } \frac{ب}{ا} = \frac{د}{ج}$$

یا ب : ا = د : ج

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو دوسری مقدار کو پہلی مقدار سے دہنی ہوگی جو چوتھی مقدار کو تیسری مقدار سے ہے اسے عکس نسبت کہتے ہیں

(۲) اگر ا : ب = ج : د

تو ا : ج = ب : د

[تبدیل نسبت]

$$\text{چونکہ } ۱ : د = ب : ج \text{ اسلئے } \frac{۱}{د} = \frac{ب}{ج}$$

$$\text{یعنی } \frac{۱}{د} = \frac{ب}{ج}$$

$$\text{یا } ۱ : ج = ب : د$$

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو پہلی مقدار کو تیسری مقدار سے دہی نسبت ہوگی جو دوسری مقدار کو چوتھی مقدار سے ہے اسے تبدیل نسبت کہتے ہیں۔

$$(۳) \text{ اگر } ۱ : ب = ج : د$$

$$\text{تو } ۱ + ۱ : ب + ب = ج + ج : د + د$$

$$\text{چونکہ } \frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ اسلئے } \frac{۱}{ب} + ۱ = \frac{ج}{د} + ۱$$

$$\text{یعنی } \frac{۱ + ب}{ب} = \frac{ج + د}{د}$$

$$\text{یا } ۱ + ب : ب = ج + د : د$$

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو پہلی اور دوسری مقادیر کے مجموعہ کو دوسری مقدار سے دہی نسبت ہوگی جو تیسری اور چوتھی مقادیر کے مجموعہ کو چوتھی مقدار سے ہے۔ اسے ترکیب نسبت کہتے ہیں۔

$$(۴) \text{ اگر } ۱ : ب = ج : د$$

$$\text{تو } ۱ - ب : ب = ج - د : د \quad [\text{تفصیل نسبت}]$$

$$\text{چونکہ } \frac{۱}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ اسلئے } \frac{۱}{ب} - ۱ = \frac{ج}{د} - ۱$$

$$\text{یعنی } \frac{۱ - ب}{ب} = \frac{ج - د}{د}$$

$$\text{یا } ۱ - ب : ب = ج - د : د$$

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو جتنی اول مقدار دوسری سے زیادہ ہو اُس زیادتی کی نسبت دوسری مقدار سے لیں اور جتنی تیسری مقدار چوتھی سے زیادہ ہو اُس زیادتی کی نسبت چوتھی مقدار سے لیں تو یہ نسبتیں آپس میں برابر ہونگی اسے تفصیل نسبت کہتے ہیں۔

$$(۵) \text{ اگر } ۱ : ب = ج : د$$

$$\text{تو } ۱ + ب : ب - ۱ = ج + د : ج - د$$

$$\text{نتیجہ (۳) سے } \frac{۱ + ب}{ب} = \frac{ج + د}{د}$$

$$\text{” (۴) سے } \frac{۱ - ب}{ب} = \frac{ج - د}{د}$$

$$\text{اسلئے عمل تقسیم سے } \frac{۱ + ب}{۱ - ب} = \frac{ج + د}{ج - د}$$

$$\text{یا } ۱ + ب : ب - ۱ = ج + د : ج - د$$

یعنی اگر چار مقادیر متناسب ہوں تو پہلی اور دوسری مقدار کے مجموعہ کو جو نسبت اُس زیادتی ہو جو پہلی مقدار کو دوسری مقدار پر حاصل ہے وہ اُس نسبت کے برابر ہوگی جو تیسری اور چوتھی مقدار کے مجموعہ کو اُس زیادتی سے ہو جو تیسری مقدار کو چوتھی مقدار پر حاصل ہے۔ اسے بالعموم ترکیب اور تفصیل نسبت کہتے ہیں۔

۲۶۔ طالب علم کو ان نتائج کے ثابت کرنے میں مشکل نہیں ہوگی۔

$$\text{اگر } ۱ : ب = ج : د$$

$$\text{تو } ۱ : م = ب : ن = ج : د \quad (۱)$$

$$\text{اور } ۱ : ن = ب : م = ج : د \quad (۲)$$

چونکہ $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = ک$ (فرض کرو)

۱ = ب ک اور ج = د ک (عہ)

اب (عہ) کو استعمال کرنے سے

$$\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ک + ب}{ک - ب} = \frac{ب(ک + ۱)}{ب(ک - ۱)} = \frac{ک + ۱}{ک - ۱}$$

یعنی اسی طریقہ سے $\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ج + د}{ج - د} = \frac{د + د}{د - د}$

اسلئے $\frac{ا + ب}{ا - ب} = \frac{ک + ۱}{ک - ۱} = \frac{ج + د}{ج - د}$

اب نتیجہ (۳) پر غور کرو

بموجب سابق $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = ک$... (فرض کرو)

۱ = ب ک اور ج = د ک

$$\frac{ل + م}{ل + ق} = \frac{ل ب ک + م}{ل ب ک + ق} = \frac{ل + م}{ل + ق}$$

اسی طرح سے $\frac{ل + م}{ل + ق} = \frac{ل د ک + م}{ل د ک + ق} = \frac{ل + ج}{ل + ج}$

اسلئے $\frac{ل + م}{ل + ق} = \frac{ل + ج}{ل + ج} = \frac{ل + م}{ل + ق}$ اور علیٰ هذا القیاس

مثال ۱۔ اگر $ا : ب = ج : د$ اور $ا : ب = ج : د$

تو $ا : ب = ج : د$ اور $ا : ب = ج : د$

$$ا : ب = ج : د \text{ اور } ا : ب = ج : د$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{ب}{د} = \frac{ج}{د} = \frac{ک}{د}$$

$$\text{اور } \frac{ب}{د} = \frac{ج}{د} = \frac{ک}{د}$$

$$\frac{ب + ج + ک}{د} = \frac{ب}{د} + \frac{ج}{د} + \frac{ک}{د} = \frac{ب}{د} + \frac{ج}{د} + \frac{ک}{د}$$

$$(۱) \dots \dots \dots \frac{ب}{د} = \frac{ب}{د} = \frac{ب}{د}$$

اسی طرح سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{ب + ج + ک}{د} = \frac{ب}{د} + \frac{ج}{د} + \frac{ک}{د} = \frac{ب}{د} + \frac{ج}{د} + \frac{ک}{د}$$

(۱) اور (۲) سے نتیجہ ہمارا ثابت ہے

مثال ۲۔ اگر ۱ اور ۲ میں ب وسط متناسب ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \dots \dots \dots (۱ + ب + ج) (ج + ب + ج) = (۱ + ب + ج) (ج + ب + ج)$$

$$(۲) \dots \dots \dots (۱ + ب + ج) (ج + ب + ج) = (۱ + ب + ج) (ج + ب + ج)$$

سب سے پہلے ربط (۱) پر غور کرو

$$(۱ + ب + ج) (ج + ب + ج) = (۱ + ب + ج) (ج + ب + ج)$$

$$= (ج + ب) - ۱$$

$$\text{اب بہر جب شرائط سوال } \frac{ب}{ج} = \frac{ب}{ج} \text{ یعنی } ب = ج$$

$$\text{اس لئے } (ج + ب) - ۱ = ب = ج - ۱ = ج - ۱ + ج + ج = ج + ج + ج$$

$$= ج + ب + ج =$$

چونکہ $ب^2 = ا ج$ پس (۱) ثابت ہوئی
اب (۲) کو لو اور اختلاف کی خاطر فرض کر دو کہ

$$\frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ک}$$

اسلئے $ب = ک ج$ اور $ا = ب ک = ک (ک ج) = ک^2 ج$

ہیں ذیل کی مساوات متماثلہ ثابت کرنی ہے۔

$$۲(ا ج + ک ج + ج) + ۲(ک ج) + ۲(ک ج) + ۲ج$$

$$= ۲(ک ج + ک ج + ج) (ک ج + ج) = ۲(ک ج + ج)$$

$$\text{یعنی } \{ (ک^2 + ا + ۲ک + ۱) + ۲(ک + ۱) + ۲ج \}$$

$$= ۲(ک + ۱ + ک + ۱) (ک + ۱ + ج) \dots (۳)$$

$$\text{اب } \{ (ک^2 + ا + ۲ک + ۱) + ۲(ک + ۱) + ۲ج \}$$

$$= (ک + ۱ + ک + ۱) \{ (ک + ۱) + (ک - ۱) + ج \}$$

$$= ۲(ک + ۱) (ک + ۱ + ج)$$

جس سے (۳) کی صداقت ثابت ہے اور اس لئے (۲) ثابت ہوئی۔

$$\text{مثال ۳۔ اگر } \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ک} = \frac{ل}{ا} = \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ا} = \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ا}$$

تو ثابت کر دو کہ $(ب - ج) (ج - ل) (ل - ا) (ا - ب) (ب - ی) = ۰$

$$\text{فرض کر دو کہ } \frac{ب}{ج} = \frac{ا}{ک} = \frac{ل}{ا} = \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ا} = \frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ا}$$

$$\text{تو } ل = (ب + ج - ا) ک$$

$$\text{ما} = (ج + ا - ب) ک$$

$$می = (ا + ب - ج) ک$$

اب ان تین معادلات کی مدد سے

$$(ب - ج) لا + (ج - ا) ما + (ا - ب) ی$$

$$= (ب - ج) (ج + ا - ب) ک + (ج - ا) (ا + ب - ج) ک$$

$$+ (ا - ب) (ب + ج - ا) ک$$

$$= [(ب - ج) ج + ا - ب] - [(ا - ب) ج + ب - ا] + [(ا - ب) ج + ج - ا] ک$$

$$[. - .] = . = .$$

$$\text{مثال ۴۔ اگر } \frac{ب ی + ج ما}{ب - ج} = \frac{ج لا + ا ی}{ج - ا} = \frac{ا ما + ب لا}{ا - ب} \dots (۱)$$

$$\text{تو } (ا + ب + ج) (لا + ما + ی) = (ا + ب + ج) (ا + ب + ج) ی \dots (۲)$$

فرض کر دو کہ (۱) کی ہر ایک نسبت = ک

$$\text{تب } ب ی + ج ما = ک (ب - ج) \dots (۳)$$

$$ج لا + ا ی = ک (ج - ا) \dots (۴)$$

$$ا ما + ب لا = ک (ا - ب) \dots (۵)$$

(۳) د (۴) اور (۵) کو جمع کرنے سے

$$(ب + ج) لا + (ج + ا) ما + (ا + ب) ی$$

$$= ک \{ (ب - ج) + (ج - ا) + (ا - ب) \}$$

$$= . \times . = .$$

اب اگر ہم لا + ب ما + ج ی کو طرفین پر زیادہ کریں تو ہمیں مساوات

(۲) حاصل ہوگی۔

۲۹۔ اب ہم تناسب کی تعریف جبریہ کا اقلیدس کی تعریف تناسب سے مقابلہ کریں گے۔ اقلیدس کی تعریف یہ ہے۔

چار مقادیر متناسب کہلاتی ہیں اگر پہلی اور تیسری مقادیر کے کوئی اضلاع متساویہ لئے جائیں اور نیز دوسری اور چوتھی مقادیر کے کوئی اضلاع متساویہ لئے جائیں تو تیسری مقدار کا نصف چوتھی مقدار کے نصف سے بڑا ہوگا یا برابر ہوگا یا چھوٹا ہوگا بمطابق اس کے کہ پہلی مقدار کا نصف دوسری مقدار کے نصف سے بڑا ہو یا برابر ہو یا چھوٹا ہو۔

رموز جبریہ میں یہ تعریف اس طرح بیان ہوگی
چار مقادیر a, b, c, d متناسب ہونگی اگر
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
 بمطابق اس کے کہ f $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ کوئی مثبت صحیح اعداد ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ سے تعریف ہندسیہ حاصل کرنی ہے جو کہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اسلئے طرفین کو $\frac{b}{c}$ میں ضرب دینے سے حاصل

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

ہوگا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ بمطابق اس کے کہ f $\frac{a}{c}$ اور $\frac{b}{d}$ کوئی مثبت صحیح اعداد ہیں۔

دعویٰ ہمارا ثابت ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ہمیں تناسب کی تعریف جبریہ تعریف ہندسیہ سے مستنبط کرنی ہے معلوم ہے $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ بمطابق اس کے کہ f $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ کوئی مثبت صحیح اعداد ہیں۔

اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{1}{د} = \frac{ج}{د}$

اگر کسور $\frac{1}{د}$ اور $\frac{ج}{د}$ برابر نہ ہوں تو ان میں سے کوئی ایک دوسری سے بڑی ہوگی۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{د} < \frac{1}{د}$ جب تک اگر ق اور ق مثبت صحیح

ہوں تو اس صورت میں ایک ایسی کسر $\frac{ق}{د}$ دریافت ہو سکتی ہے جو $\frac{1}{د}$ اور $\frac{ج}{د}$ کے درمیان واقع ہو۔

(۱) اسلئے $\frac{1}{د} < \frac{ق}{د}$

(۲) اور $\frac{ج}{د} > \frac{ق}{د}$

بوجب (۱) ق $<$ د

اور بوجب (۲) ق $>$ د

اور جو کچھ ہم نے فرض کیا تھا یہ اس کے خلاف ہے۔

اسلئے $\frac{1}{د}$ اور $\frac{ج}{د}$ غیر مساوی نہیں ہیں۔ یعنی

$\frac{1}{د} = \frac{ج}{د}$ جس سے دعویٰ ہمارا ثابت ہے۔

۳۔ اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ تناسب کی تعریف ہندسیہ کا تعلق مقادیر مفردوں سے ہے جیسے خطوط ازادے رقبے وغیرہ وغیرہ جو بطریق ہندسیہ تعبیر کئے گئے ہوں مگر جن کا تعلق کسی پیمانہ واحد سے نہ ہو۔ اس لئے اقلیدس کی تعریف مقادیر متباہن اور متوافقی دونوں پر حاوی ہے، مگر تعریف جبریہ اگر صحیح طور پر بیان کیا جائے تو صرف مقادیر متوافقی پر ہی صادق آتی ہے کیونکہ بوجب اس کے سب سے پہلے یہ مان لینا پڑتا ہے کہ لا مقدار

ب کا وہی معین حصہ یا حصے یا ضعف ہے جو ج مقدار د کا ہے لیکن سب ثبوت جو ہم نے متوافق مقادیر کے لئے دئے ہیں متبائن مقادیر کے لئے بھی درست ہیں کیونکہ ہم دفعہ ۹ میں ثابت کر چکے ہیں کہ دو مقادیر متبائن کی نسبت کا فرق دو اعداد صحیح کی نسبت سے اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے کہ وہ ہر ایک مقدار معین سے کم ہو۔

۱۳۔ اس باب کو ہم اشد ذیل کے حل سے ختم کرینگے بعض اوقات خاص قسم کی مساوات کا حل اعمال ترکیب اور تفصیل النسبت کے متناسب مثال سے آسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر (۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د) (۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د) =

(۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د) (۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د) تو ثابت کر دو کہ ا د ب ج د متناسب ہیں۔

$$\frac{۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}{۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د} =$$

$$\frac{۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}{۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د} =$$

$$\frac{۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}{۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د} =$$

$$\frac{۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}{۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د} =$$

اس لئے ترکیب اور تفصیل نسبت سے

$$\frac{(۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د)^۲}{(۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د)^۲} =$$

$$\frac{(۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د)^۲}{(۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د)^۲} =$$

$$\frac{۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}{۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د} = \frac{۲م + ۶م ب + ۳ن ج + ۹ن د}{۲م - ۱م ب - ۳ن ج - ۹ن د}$$

دوبارہ ترکیب اور تفصیل نسبت سے $\frac{۱۲م}{۵ن} = \frac{۱۲ج}{۶ن}$

جس سے $\frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۶}$ یا ۱:۵ = ۱:۶ = ج:د

مثال ۲۔ مسادات $\frac{۱۲م + ۱۲م}{۱۲م - ۱۲م} = \frac{۱۲م}{۱۲م}$ کو حل کرو

ترکیب اور تفصیل نسبت سے حاصل ہوگا $\frac{۱۲م}{۱۲م} = \frac{۱۲م}{۱۲م}$

$$\frac{۱۲م + ۱۲م}{۱۲م - ۱۲م} = \frac{۱۲م}{۱۲م}$$

پھر ترکیب اور تفصیل نسبت سے $\frac{۱۲م + ۱۲م}{۱۲م - ۱۲م} = \frac{۱۲م}{۱۲م}$

$$\frac{۱۲م + ۱۲م}{۱۲م - ۱۲م} = \frac{۱۲م}{۱۲م}$$

جس سے $۱۲م - ۱۲م = ۱۲م - ۱۲م$

$$\frac{۱۲م}{۱۲م} = \frac{۱۲م}{۱۲م}$$

امثلہ نمبری ۲

۱۔ اعداد ۳ و ۵ و ۷ کا چوتھا متناسب دریافت کرو

۲۔ وسط متناسب دریافت کرو۔

(۱) ۲ اور ۲ کے درمیان

(۲) ۳ و ۵ اور ۲ کے درمیان

۳۔ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۱}{۲}$ کا تیسرا متناسب دریافت کرو۔

اگر ۱:۲ = ج:د تو ثابت کرو کہ

$$۴ - ا^۱ج + ا^۱ج : ب^۱د + د^۱ = (ا + ج) : (ب + د) = ۳$$

$$۵ - ن^۱ا + ا^۱ق : ب^۱ن + ن^۱ق = ب^۱ا + ا^۱ق : د^۱ن + ن^۱ق = ۲$$

$$۶ - ا - ج : ب - د = م^۱ا + ا^۱ج : م^۱ب + ب^۱د$$

$$۷ - م^۱ا + ا^۱ج : م^۱ب + ب^۱د = م^۱ا + ا^۱ج + ج : م^۱ب + ب^۱د + د = ۳$$

اگر ا و ب و ج و د متناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۸ - ا : ب = د : ج = ۳$$

$$۹ - ا^۲ب + ب^۲ا : د^۲ج + ج^۲د = ۳$$

$$۱۰ - (ا^۱ا + ا^۱ب + ب^۱ج + ج^۱د) = (ب^۱ا + ا^۱ج + ج^۱د + د^۱ا) = (ا + ب + ج + د)$$

۱۱ - اگر ا اور ج کا وسط متناسب ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱۲ - ا^۲ب + ب^۲ج : ا^۲ج + ج^۲ب = ۲$$

$$۱۳ - اگر ا : ب = س : د اور ع : ف = گ : ح تو ثابت کرو کہ$$

$$ا^۱ع + ع^۱ب : ا^۱ع - ب^۱ع = س^۱گ + گ^۱د : س^۱گ - د^۱د$$

معادلات ذیل کو حل کرو

$$۱۳ - \frac{۱۳ - ۵ + ۲ - ۳}{۱۳ + ۵ + ۲ - ۳} = \frac{۱ + ۷ + ۳ - ۲}{۱ - ۷ - ۳ - ۲}$$

$$۱۴ - \frac{۳ + ۷ - ۲ + ۵}{۳ - ۷ + ۲ - ۵} = \frac{۳ - ۷ - ۲ + ۳}{۳ + ۷ + ۲ - ۳}$$

$$۱۵ - \frac{ج + ا + (ن + لا)}{(ن - لا) + ج} = \frac{(ن + لا - (ب - ا))}{(ن - لا) - (ب + ا)}$$

۱۶۔ اگر ا و ب و ج و د متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا + د = ب + ج + \frac{(ا - ب)(ب - ج)}{د}$$

۱۷۔ اگر ا و ب و ج و د و ع متناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ
(ا ب + ب ج + ج د + د ع) : (ا + ب + ب + ج + ج + د + د + ع) = ۱ : ۱

۱۸۔ اگر ن مقادیر ا، ب، ج، د، ع، ہوں متناسب مسلسل میں ہوں۔

تو ثابت کرو کہ :

$$\frac{ا - ب}{ب} = \frac{ب - ج}{ج} = \frac{ج - د}{د} = \frac{د - ع}{ع} = \dots = \frac{ن - ۱}{ن}$$

$$\frac{ا - ب}{ب} = \frac{ا - ب}{ب} \cdot \frac{ب - ج}{ج} \cdot \frac{ج - د}{د} \cdot \frac{د - ع}{ع} \cdot \dots = \frac{ا - ن}{ن}$$

$$\frac{ا - ب}{ب} = \frac{ا - ن}{ن} \cdot \frac{ن - ۱}{ن} = \frac{ا - ن}{ن}$$

۱۹۔ اگر : ا : ب = ج : د = ع : ن

تو : ا + ب : ب + ج : ج + د : د + ع : ع + ن = ۱ : ۱

اور :

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{ع}{ن} = \frac{ا + ب}{ب + ج} = \frac{ب + ج}{ج + د} = \frac{ج + د}{د + ع} = \frac{د + ع}{ع + ن} = \frac{ع + ن}{ن + ا} = \dots = \frac{ا + ب + ج + د + ع + ن}{ن + ا + ب + ج + د + ع + ن} = ۱$$

۲۰۔ اگر لا - ۱ شخصوں کے لا + ۱ دن کے کام کی نسبت لا + ۲ شخصوں

کے لا - ۱ دن کے کام سے ۹ : ۱۰ ہو تو لا معلوم کرو۔

۲۱۔ ایسے چار متناسب اعداد معلوم کرو جن کی طرفین کا مجموعہ ۲۱ ہو سطین

کا مجموعہ ۱۹ اور ان سب کے محذوروں کا مجموعہ ۴۴۲

۲۲۔ دو ظرف اور ب ہیں انہیں دو مختلف قسم کی شراب کے مرکب بھرے گئے ہیں اور ب مرکب کی نسبت ۲: ۷ ہے اور ب میں ۱: ۵ ہر ایک ظرف سے کتنی کتنی مقداریں مختلف مرکبوں کی لی جائیں کہ ایک نیا مرکب بن جائے جس میں ۲ گیلن ایک مرکب کے اور ۹ گیلن دوسرے کے شامل ہوں۔
 ۲۳۔ ایک ظرف شراب سے پڑے اس میں سے ۹ گیلن نکالے گئے ہیں اور اسے پانی سے بھر دیا گیا ہے اگر ظرف میں اس وقت شراب اور پانی کی نسبت ۱۶: ۹ ہو تو معلوم کرو کہ اس ظرف کی کل گنجائش کتنی ہے۔
 ۲۴۔ اگر چار مقداریں تناسب مسلسل میں ہوں تو ثابت کرو کہ پہلی اور آخری مقدار کا فرق باقی دو مقداروں کے فرق کا کم از کم تین گنا ہے۔

۲۵۔ کسی ملک میں ۱۸۸۷ء سے لیکر ۱۸۸۸ء تک آبادی ۶۹ فیصدی بڑھی۔ اگر قصبائی آبادی ۱۸ فیصدی اور دیہاتی آبادی ۴ فیصدی بڑھی ہو تو ۱۸۸۷ء میں قصبائی اور دیہاتی آبادی کا مقابلہ کرو۔
 ۲۶۔ کسی ملک میں چاء کا صرف قبوہ سے ۵ گنا زیادہ ہے اگر ۱ فیصدی زیادہ چاء اور ب فیصدی زیادہ قبوہ صرف ہوتا تو کل مقدار صرف شدہ ج فیصدی زیادہ ہوتی۔ لیکن اگر ب فیصدی زیادہ چاء اور ۱ فیصدی زیادہ قبوہ استعمال ہوتا تو کل مقدار استعمال شدہ ۳ ج فیصدی زیادہ ہوتی۔ اور ب کا مقابلہ کرو۔

۲۷۔ پیتل کی ترکیب میں جست اور تانبے کی آمیزش ہے کانسے میں ۸۰ فیصدی تانبا ۴ فیصدی جست اور ۱۶ فیصدی تفلہ شامل ہے۔ کسی پنگے ہوئے پیتل اور کانسے کے مرکب میں ۴ فیصدی تانبا اور ۱۶ فیصدی جست اور ۱۰ فیصدی تفلہ پائی گئی پیتل کی ترکیب میں تانبے اور جست کی

نسبت معلوم کرو۔

۲۸۔ چند طاح کشتی کو ایک خاص فاصلہ تک بہاؤ کے خلاصہ ۴ ۸ منٹ میں
 بیجا سکتے ہیں اور بہاؤ کے رخ میں اسی فاصلہ کو کھڑے پانی کی نسبت ۹ منٹ
 کم عرصہ میں طے کر لیتے ہیں معلوم کرو کہ بہاؤ کے رخ میں اسی فاصلہ کو کتنی دیر
 میں طے کر لیں گے۔

باب سوم

تغییر

۴۴- اگر مقدار موقوف ہو یا حاصل ہو سکے یا حسابی اصطلاح میں جملہ ہو ایک دوسری مقدار لا کا تو اس ربط کو ہم کئی طرح سے بیان کر سکتے ہیں مثلاً

$$ما = ۳ لا$$

$$ما = ۱ لا^۲$$

$$ما = لا + ب$$

$$ما = لا^۲ + ب لا + ج$$

$$ما = ۲ لا^۳ اور علیٰ ہذا القیاس$$

لا کو متغیر متبوع اور ما کو متغیر تابع کہتے ہیں۔ کیونکہ ہم لا کے لئے جو قیمت چاہیں مقرر کر سکتے ہیں اور ارتباطات جبریہ مندرجہ بالا سے ہا کی مطابقت ہر ایک صورت میں حاصل ہو سکتی ہے۔

لا اور ما کے سوا باقی تمام مقادیر مثلاً ۳ و ۱ و ۲ و ۳ و غیرہ جو معادلات بالا میں شامل ہیں مقادیر مستقل یا نامتغیر کہلاتی ہیں کیونکہ ان کی قیمت ہمیشہ وہی رہتی ہے اور مقادیر متغیر ما اور لا کے بدلنے سے ان میں فرق نہیں آتا۔

۴۵- تعریف۔ جب کہا جائے کہ ایک مقدار ما ایسے بدلتی ہو جیسے

ایک دوسری مقدار لا بالا استقامت تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ دو مقداریں ایک دوسرے پر اس طرح موقوف ہیں کہ اگر لا کو بدلا جائے تو ما بھی اسی نسبت سے بدلیگا۔

نوٹ - لفظ "بالاستقامت" کو اکثر حذف کرتے ہیں اور صرف یہی کہتے ہیں کہ ما ایسا بدلتا ہے جیسا لا۔

جب ما اس طرح بدلے جس طرح لا تو اس قسم کے تغیر کو تغیر مستقیم کہتے ہیں اور اسے اس رمز ∞ سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً ∞ لا کا یہ مطلب ہے کہ "ما ایسا بدلتا ہے جیسا لا"

اس قسم کے تغیر کی مثال یہ ہے اگر ایک ریل گاڑی کیساں رفتار سے ۴۰ میل میں جا رہی ہو تو وہ ۳۰ منٹ میں ۲۰ میل اور ۱۲۰ منٹ میں ۸۰ میل جائیگی وغیرہ وغیرہ ہر ایک صورت میں طے کردہ فاصلہ اسی نسبت سے بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے جیسے وقت۔ اسے اکثر یوں بیان کرتے ہیں کہ جب رفتار کیساں ہو تو فاصلہ ایسے بدلتا ہے جیسے وقت۔

۳۳ - اگر ما ایسا بدلتا ہو جیسا لا تو ما حاصل ضرب لا اور ایک مقدار مستقل کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ $ما \times د = ط$ اور $لا \times د = ط$ اور $لا \times د = ط$ مطابق قیمتیں ما اور لا کی ہیں

بوجہ تعریف $\frac{ما}{لا} = \frac{ط}{د}$ اور $\frac{لا}{لا} = \frac{ط}{د}$ اور $\frac{لا}{لا} = \frac{ط}{د}$ چونکہ ہر ایک $\frac{ط}{د}$ کے برابر ہے

اسلئے نسبت $\frac{\text{مالی کوئی قیمت}}{\text{لا کی مطابق قیمت}}$ ہمیشہ وہی رہتی ہے

یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{م جہاں م مقدار مستقل ہے۔}$

∴ $\text{ما} = \text{م لا}$ ----- (۱)

اگر ما اور لا کی مطابق قیمتوں کا کوئی زوج معلوم ہو تو مساوات (۱) سے مقدار مستقل م کی قیمت حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = ۳$ جب $\text{لا} = ۱۲$ تو $۳ = \text{م} \times ۱۲$

اسلئے $\text{م} = \frac{۱}{۴}$ اور $\text{ما} = \frac{۱}{۳}$

مثال - کسی دائرہ کا محیط ۵۵ قطر

∴ $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \text{ایک مستقل مقدار}$

یہ مقدار π سے تعبیر ہوتی ہے اور اس کی قیمت ۳.۱۴۱۵۹ ہے۔

اسلئے محیط $= \pi ۲$ ر جہاں ر نصف قطر ہے ہمیں π عبرانی حرف "جیٹ" ہے

۳۵ - تغیر ربط تناسب کو بیان کرنے کا طریق جلیہ ہے

فرض کرو کہ نظام ذیل میں

تغیر متبوع کی قیمتیں	تغیر تابع کی مطابق قیمتیں
لا	ما
لا	ما

تغییرات متبوع اور تابع کی کوئی سی قیمتوں کے دو مطابق زوج (لا و ما) اور

(لا و ما) ہیں اور ان میں ربط تناسب یہ ہے $\text{ما} : \text{لا} = \text{لا} : \text{لا} \dots \dots (۱)$

جس سے $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ یعنی $\text{ما} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}}\right) \text{لا}$

اب اگر $\frac{م}{لا}$ ایک مستقل نسبت ہو یعنی (ما و لا) ایک غیر متبادل زوج ہو تو اس نسبت کو ہم اسے تغیر کر سکتے ہیں جہاں لا مقدار مستقل ہے اسلئے

$$ما = لا \dots\dots\dots (۳)$$

یعنی ما ایک مستقل ضعف لا کا ہے۔

مثالی - فرض کرو کہ (ما و لا) اور (ما و لا) دو مطابق زوجوں کے لئے
رابطہ ما : لا = مآ : لا صحیح ہے اور جب لا = ۳ تو ما = ۶

اب چونکہ ۶ اور ۳ مطابق قیمتوں کا ایک زوج ہے اسلئے ما : لا = ۶ : ۳

یعنی $\frac{ما}{لا} = \frac{۶}{۳} = ۲$ اسلئے ما = ۲ لا

برعکس اس کے مساوات (۳) سے مساوات (۱) حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ جو (۲)

ما = لا

اور اگر ما و لا دو مطابق قیمتیں ہوں تو

ما = لا

اسلئے $\frac{ما}{لا} = \frac{لا}{لا} = ۱$

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ما ایسا جتنا ہے جیسا لا تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ ما ایک ایسا جند لا کا ہے کہ لا کی قیمت میں کوئی تبدیلی ما کی قیمت میں ایک متناسب تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ رمز ∞ قائم مقام ہے "متناسب ہے" کا

اگر ما ∞ لا اور جب لا کی ایک خاص قیمت ن ہو تو ما کی مطابق قیمت م ہوگی اس طرح پر کہ ما و لا و م و ن متناسب ہونگے یعنی ما : لا = م : ن
۴۔ اکثر ایسا بیان کرتے ہیں کہ "اگر ما سے فاصلہ تغیر کریں جو کسی شخص نے یکساں رفتار سے طے کیا ہو اور لا سے عرصہ مسافت تغیر کریں

تو ما $\frac{1}{2}$ لا یعنی $\frac{1}{2}$ ایک نسبت مستقل ہے۔

یہاں فاصلہ اور وقت ایک قسم کی مقادیر نہیں ہیں اور اس لئے
ان میں ربط نسبت نہیں ہو سکتا۔ لیکن یاد رہے کہ ما اور لا اعداد ہیں ما
فاصلے کی اکائیوں کو تعبیر کرتا ہے اور لا وقت کی اکائیوں کو۔

اگر ما = تعداد میلوں کی

اور لا = تعداد گھنٹوں کی

تو $\frac{1}{2}$ ایک جائز نسبت ہے اور اس کے معنی بخوبی سمجھ میں آ سکتے ہیں۔

اگر فاصلہ طے شدہ ۴ گھنٹے کے بعد ۱۲ میل ہو تو ما : لا = ۱۲ : ۴ یعنی
ما = ۳ لا اگر ہم لا کے لئے کوئی اور خاص قیمت مثلاً ۵ مقرر کریں تو بھی
ما = ۳ لا اس لئے ما = ۳ × ۵ = ۱۵

کے ۳۔ اگر ایک مقدار ما اس طرح بدلے جس طرح کہ ایک دوسری مقدار
لا کا متکافی یا مقلوب تو ہم کہا کرتے ہیں کہ ما اور لا میں تغیر معکوس
سے اور اسے بعض اوقات اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ما بدلتا ہے
بالعکس لا کے۔

پس اگر ما اور لا میں تغیر معکوس ہو تو ما = $\frac{1}{2}$ جہاں ۴ ایک مقدار
مستقل ہے۔ تغیر معکوس کی توضیح کے لئے ایک مثال مندرجہ ذیل ہے۔
اگر ۴ آدمی ایک کام کو ۸ گھنٹے میں کرتے ہوں تو ۱۲ آدمی اُسی کام کو
۴ گھنٹے میں اور ۲ آدمی ۲۴ گھنٹے میں کریں گے اور علیٰ ہذا نقیاس۔

اس سے ظاہر ہے کہ اگر آدمیوں کی تعداد بڑھا دی جائے تو وقت اُسی
نسبت سے گھٹ جائیگا۔ اور برعکس اس کے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ لا کا جذر الکعب ما کے مجذور کے بالعکس بدلتا ہو

اگر لا = ۸ جب ما = ۳ تو لا معلوم کر دو جب ما = $\frac{1}{4}$ ہے
 بوجب شرائط سوال $\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ جہاں م ایک مقدار مستقل ہے
 اس مساوات میں لا = ۸ اور ما = ۳ رکھنے سے

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{8} \quad \therefore م = ۱۸ \quad \text{اور} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

اس لئے ما = $\frac{3}{4}$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے لا = ۵۱۲

مثال ۲۔ کسی سیارہ کی گردش کے وقت کا محذور ایسا بدلتا ہے
 جیسا کہ مکعب اُس فاصلے کا جو سیارہ اور سورج کے درمیان ہو۔ اگر
 فرض کیا جائے کہ زمین اور زہرہ (وینس) کے فاصلے سورج سے جدا گانہ
 ۹۱۲۶۵ اور ۶۶۰ لاکھ میل ہیں تو زہرہ کی گردش کا وقت دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ ایک گردش کا وقت ت ہے دنوں میں اور > فاصلہ ہے
 لاکھ میلوں میں۔

بوجب شرائط سوال $t^3 \propto d^3$

یا $t^3 = k \cdot d^3$ جہاں ک مقدار مستقل ہے پس زمین کے لئے

$$۹۱۲۶۵ \times ۳۶۵ = k \times ۶۶۰ \times ۹۱۲۶۵$$

$$\frac{۳۶۵ \times ۳۶۵}{۹۱۲۶۵ \times ۹۱۲۶۵} = \frac{k}{۹۱۲۶۵ \times ۹۱۲۶۵}$$

$$\frac{3(10)}{3(25) \times 365} = \frac{1}{3(265) \times 365} =$$

$$\frac{3(10)}{3(25) \times 365} = \frac{1}{3(265) \times 365}$$

$$۳(۶۶۰) \times \frac{3(10)}{3(25) \times 365} = ۳(۶۶۰) \times \frac{1}{3(265) \times 365}$$

$$\frac{2(44) \times 3}{345} = \frac{3(44) \times (10)}{345 \times 3(25)} =$$

$$\frac{262}{345} \times 44 \times 3 = \text{اسلئے ت}$$

$$\text{تقریباً } \frac{1.4 \times 233}{18} \times 242 =$$

$$0.685 \times 242 =$$

$$222.62 =$$

اسلئے زبرہ کی گردش کا وقت $\frac{1}{222}$ دن ہے۔

۳۸۔ اگر ایک مقدار اس طرح بدلے جس طرح کہ دو یا زیادہ مقادیر کا حاصل ضرب بدلتا ہے تو ہم کہا کرتے ہیں کہ ان میں تغیر مشترک ہے اگر می بدلتا ہے بالاشترک لا اور ما کے تو می = م لا ما جہاں م مقدار مستقل ہے۔

مثلاً کسی رقم کا سود بدلتا ہے بالاشترک اصل روپیہ اور مدت اور شرح فیصدی کے۔

۳۹۔ اگر تین مقادیر ہوں اور پہلی مقدار اُسی نسبت سے بدلے جیسا کہ حاصل ضرب دوسری مقدار اور تیسری مقدار کے متکافی کا بدلتا ہے تو مقادیر اول اور دوم میں تغیر مستقیم اور اول اور سوم میں تغیر معکوس کہلائیکا۔ یعنی اگر می بدلتا ہے بالاستقامت لا کے اور بالعکس ما کے تو می = $\frac{م لا}{ہا}$ جہاں م مقدار مستقل ہے۔

ما = م لا + ن لا جہاں م اور ن مقادیر مستقل ہیں۔ اس جگہ ما ایسا جملہ ہے لا کا جس میں دو ارقام شامل ہیں ان میں سے ایک لا کے

متناسب ہے اور دوسری لا کے
 اگر ما = $\frac{ک}{لا}$ تو ما بدلتا ہے بالعکس لا کے مجذور کے کشش زمین
 اس اصول کی ایک مثال ہے کیونکہ کسی بیرونی شے پر زمین کی کشش
 بدلتی ہے بالعکس اس فاصلہ کے مجذور کے جو زمین کے مرکز اور اس
 شے کے درمیان ہو۔ اگر یہ فاصلہ دوگنا ہو جائے تو کشش کو $\frac{1}{4}$ سے ضرب
 دینا پڑیگا۔ اگر فاصلہ تین گنا ہو جائے تو کشش اپنی اصلی مقدار کا $\frac{1}{9}$
 ہو جائے گی۔

اگر ما ∞ لا تو اسے ہم اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ما = م لا جہاں
 م مقدار مستقل ہے۔ اگر اس وقت ما ∞ ی تو ہم اسے بیان کر سکتے ہیں
 ما = ن ی جہاں ن مقدار مستقل ہے۔ مگر ضرور نہیں کہ ما = م ی کیونکہ
 دونوں صورتوں میں ایک ہی مقدار مستقل نہیں ہو سکتی۔ اگرچہ خاص صورتوں
 میں ممکن ہے۔

۴۰۔ جب ما ∞ لا تو ما = م لا اسکی ترسیم ایک ایسا خط مستقیم ہے
 جو مبدا میں سے گزرتا ہے۔

جب ما ∞ لا تو ما = م لا اس کی ترسیم شلجمی (قطعہ مکانی) ہے
 جب ما ∞ $\frac{1}{لا}$ تو ما لا = م اس کی ترسیم ہڈلولی (قطعہ زائد) ہے

۴۱۔ اگر لا ∞ ما اور ما ∞ ی تو لا ∞ ی

چونکہ لا ∞ ما اسلئے $\frac{لا}{ما}$ = م (مقدار مستقل)

اور چونکہ ما ∞ ی اسلئے $\frac{ما}{ی}$ = ن (مقدار مستقل)

اسلئے ضرب دینے سے $\frac{لا}{ی}$ = م ن = مقدار مستقل اسلئے لا ∞ ی

۴۲۔ اگر y واجب الاستقلال ہو اور x واجب الاستقلال ہو تو ثبات کر دے کہ y واجب الاستقلال ہو اور لا دونوں بدلیں۔
ثبوت۔ چونکہ y واجب الاستقلال ہو۔

∴ $y = x$ (جہاں x موقوف ما پر نہیں ہے) (۱)
لیکن y واجب الاستقلال ہو

∴ x واجب الاستقلال ہو اسلئے x لا

∴ $x = y$ لا (جہاں y موقوف لا پر نہیں ہے) (۲)

نیز چونکہ x جزئی ہے y کا اسلئے وہ موقوف نہیں ہے۔

پس (۱) میں x کی قیمت رکھنے سے $y = x$ لا (جہاں y موقوف لا اور ما پر نہیں ہے)

اسلئے y لا

متبادل ثبوت۔ نظام ذیل میں متغیرات کی مطابق قیمتوں پر خیال کرو

[اس جگہ y صرف لا اور ما پر موقوف ہے اور اگر y واجب الاستقلال ہو اور x واجب الاستقلال ہو تو ثبات کرنا ہے کہ y لا واجب لا اور ما دونوں بدلیں]

متغیر تابع	متغیر متبوع
y	لا و ما
y	لا و ما
y	لا و ما

اب چونکہ دونوں y اور x کے مطابق x کی وہی قیمت ہے اسلئے جب

مثال ۱ - ۴ دن میں $\frac{1}{4}$ ۱۷ ایکڑ زمین میں ہل چلانے کے لئے
۶ بیلوں کی ضرورت ہے اگر بیلوں کی تعداد ۵۴ ہو تو معلوم کرو کہ $\frac{1}{4}$ دن
میں کتنے ایکڑ زمین میں ہل چلانا ممکن ہوگا -
بیلوں کی تعداد کو ب سے اور ایکڑوں کو ا سے اور دنوں کو د سے
تغییر کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ ا ∞ ب جب د مستقل ہو اور ا ∞ د جب
ب مستقل ہو : \therefore ا ∞ د ب
اسلئے $1 = م د ب$ جہاں م مقدار مستقل ہے۔
چونکہ ۴ دن میں $\frac{1}{4}$ ۱۷ ایکڑ زمین میں ہل چلانے کے لئے ۶ بیلوں
کی ضرورت ہے۔

$$\text{اسلئے } \frac{۳۵}{۳۸} = م \times ۶ \times ۴ \therefore م = \frac{۳۵}{۳۸}$$

$$\text{اسلئے } 1 = \frac{۳۵}{۳۸} د ب$$

$$\therefore \text{جب } د = \frac{۹}{۳۸} \text{ اور } ب = ۵۴$$

$$\text{تو ایکڑوں کی تعداد مطلوبہ} = \frac{۳۵}{۳۸} \times \frac{۹}{۳۸} \times ۵۴ = ۸۸ \frac{۱۹}{۳۳}$$

مثال ۲ - فرض کرو کہ رقاص کے بہتر ادا کا وقت اس طرح بدلتا ہے
جس طرح اسکے طول کا جذر۔ اگر ایک رقاص جس کی لمبائی ۳۴ ۶ ۱۷
سنٹی میٹر ہو ۴۴ سنکڑ میں ۱۰۵ مرتبہ حرکت کرے تو اُس رقاص کا
طول معلوم کرو جو ایک سنکڑ میں صرف ایک حرکت کرے۔
فرض کرو کہ ت سنکڑ ایک بہتر ادا کا وقت ہے اور ل سنٹی میٹر رقا
کا طول ہے۔

$$\text{تب } ت = ک ل$$

$$\text{جب ل} = ۱۴۶۳۳ \text{ اور ت} = \frac{۲۲}{۱۰۵}$$

$$\text{تو } \frac{۲۲}{۱۰۵} = \text{ک مال } ۱۴۶۳۳$$

$$\checkmark \quad \frac{۲۲}{۱۴۶۳۳ \times ۱۰۵} = \text{اسلئے ک}$$

✓ ہمیں ل کی قیمت چاہیئے جب ت = ۱

$$\text{مال} = \frac{\text{ت}}{\text{ک}} = \frac{۱}{ک}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{۱}{ک} = \frac{۱۴۶۳۳ \times ۱۰۵}{۲۲}$$

$$\frac{۱۶۰۹ \times ۱۰۵ \times ۱۰۵}{۱۲۱} = \frac{۱۶ \times ۱۶۰۹ \times ۱۰۵ \times ۱۰۵}{۱۶ \times ۱۲۱} =$$

$$= \frac{۱۲۰۱۴۶۲۵}{۱۲۱} = ۹۹۶۳۲ \text{ سنٹی میٹر}$$

مثال ۳۔ ایک قائم مخروط مستدیر کا حجم ۵۵ نصف قطر کا معجزہ جب ارتفاع مستقل ہو اور ۵۵ ارتفاع جب قاعدہ مستقل ہو۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر ۷ فٹ ہو اور ارتفاع ۱۵ فٹ تو حجم ۷۷ مکعب فٹ ہوتا ہے ایک ایسے مخروط کا ارتفاع معلوم کرو جس کا حجم ۱۳۲ مکعب فٹ ہو اور وہ ایک ایسے قاعدہ پر کھڑا ہو جس کا نصف قطر ۳ فٹ ہو۔

فرض کرو کہ ع اور ر جدا گانہ ارتفاع اور نصف قطر (قاعدہ مخروط) کو فٹوں میں تعبیر کرتے ہیں

$$\text{ہو جب شرائط سوال } ۷۷ = ۷ \times ۷ \times ۱۵$$

$$\text{جس سے م} = \frac{۲۲}{۲۱}$$

(ع) کسی سطح پر اشتداد روشنی بدلتا ہے بالعکس اُس فاصلہ کے جو سطح اور
مبداء کے درمیان ہو۔

۴۵۔ اس باب کو ہم چند متفرق مثالوں کے حل سے ختم کریں گے۔

مثال ۱۔ اگر لا و ما دی تین ایسی مقادیر متغیر ہوں کہ $ما + می$ - لا مقدار
مستقل ہو اور $(لا + ما - می)$ $(لا + می - ما)$ $ما می$ تو ثابت کر دو کہ
 $لا + ما + می \propto ما می$

بموجب شرائط سوال $ما + می - لا = ک$ (۱)

اور $(لا + ما - می)$ $(لا + می - ما) = م ما می$ (۲)

جہاں ک اور م مقادیر مستقل ہیں

(۲) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $لا - (ما - می) = م ما می$

$\therefore لا - (ما + می) = (م - ما) ما می$

$(لا + ما + می) (لا - ما - می) = (م - ما) ما می$

اسلئے (۱) سے $(لا + ما + می) (-ک) = (م - ما) ما می$

$\therefore لا + ما + می = (ک - م) ما می = مقدار مستقل \times ما می$

اسلئے $لا + ما + می \propto ما می$

مثال ۲۔ ایک انجن بغیر ٹرین کے ۲۴ میل فی گھنٹہ جا سکتا ہے اور

اُس کی رفتار ایک ایسی مقدار کے مطابق گھٹتی ہے جو دو گاڑیوں کی تعداد

کے جذر کے موافق بدلتی ہے۔ اگر چار گاڑیاں لگائی جائیں تو رفتار ۲۰

میل فی گھنٹہ ہوتی ہے۔ بڑی سے بڑی تعداد گاڑیوں کی معلوم کرو جنہیں

انجن ہلا سکتا ہے۔

فرض کر دو کہ $لا =$ گاڑیوں کی تعداد کے جو لگائی گئی ہیں رفتار

فی گھنٹہ = ۲۴ - م مالا جہاں م مستقل ہے
 اب چونکہ رفتار فی گھنٹہ ۲۰ میل ہے جب لا = ۴
 اسلئے ۲۰ - ۲۴ = م مالا = ۴ - ۲۴ = ۲۰ م یعنی م = ۲۰
 اسلئے انجن کی رفتار لا گاڑیوں کے ساتھ = ۲۴ - ۲۰ مالا
 جس سے ظاہر ہے اگر لا کو بڑھایا جائے تو رفتار گھٹے گی -
 فرض کرو کہ لا = لا جب رفتار معبر ہو اسلئے
 ۰ = ۲۴ - مالا

∴ مالا = ۱۲ اور لا = ۱۴
 پس اگر ۱۴ گاڑیاں لگائی جائیں تو عین اسوقت انجن اسٹاپ
 نہیں ہلا سکیگا -

اسلئے گاڑیوں کی بڑی سے بڑی تعداد جو انجن ہلا سکتا ہے = ۱۴
مثال ۳ - ایک ریل کے سفر کا عرصہ بدلتا ہے بالاستقامت فاصلہ طر
 کے اور بالعکس رفتار کے اور رفتار بدلتی ہے بالاستقامت مقدار کوئلہ
 صرف شدہ کے جذر کے اور بالعکس گاڑیوں کی تعداد کے جوڑین میں
 لگی ہوئی ہوں ۲۵ میل کے سفر میں آدھ گھنٹہ لگا اور ۱۸ گاڑیوں کے
 ساتھ ۱۰ ہنڈر ویٹ کوئلہ کے صرف ہوئے - معلوم کرو کہ ۲۱ میل سفر
 کے لئے ۲۸ منٹ میں ۱۶ گاڑیوں کے ساتھ کتنا کوئلہ درکار ہوگا -

فرض کرو کہ ت تبصر کرتی ہے وقت کو گھنٹوں میں

اور د " " بعد کو میلوں میں

اور ر " " رفتار فی گھنٹہ میلوں میں

اور ق " " کل ہنڈر ویٹ مقدار کوئلہ صرف شدہ فی

اور اس گاڑیوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے
تو بموجب شرائط سوال ہے

$$ت \propto \frac{د}{ر}$$

$$اور ر \propto \frac{ماق}{س}$$

$$جس سے ت \propto \frac{س \times د}{ماق}$$

یا ت = $\frac{ک \times س \times د}{ماق}$ جہاں ک مقدار مستقل ہے

اس مساوات میں اوپر دی ہوئی قیمتیں مندرج کرنے سے (خونکہ ق = $\frac{۱}{۲}$)

$$\frac{۵ \times ۲۵ \times ۱۸ \times ک}{۱۰۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱۰۴}{۳۶ \times ۱۲۵} = \text{یعنی ک}$$

$$\text{اس لئے ت} = \frac{ماق \times س \times د}{۳۶ \times ۱۲۵}$$

اب ت د س د کی قیمتیں جو سوال کے دوسرے حصے میں دی
ہوئی ہیں مندرج کرنے سے

$$\frac{۲۱ \times ۱۶ \times ۱۰۴}{۳۶ \times ۱۲۵} = \frac{۲۸}{۶۰}$$

$$\text{یعنی ماق} = \frac{۲۱ \times ۱۶ \times ۱۰۴}{۲۸ \times ۴۵} = \frac{۲}{۱۰۴}$$

جس سے $ق = \frac{۳۲}{۱۲۵}$
اسلئے کوٹر کی مقدار مطلوبہ $= \frac{۳۲ \times ۲۱}{۱۲۵} = \frac{۴۶}{۱۲۵}$ ہندروٹ

امثلہ نمبری ۳

۱۔ اگر لا ایسا بدلتا ہو جیسا ما اور لا = ۸ جب ما = ۱۵ تو لا دریافت کرو جب ما = ۱۰

۲۔ اگر ف بدلتا ہو بالعکس ق کے اور ف = ۷ جب ق = ۳ تو ف معلوم کرو جب ق = $۲\frac{1}{۳}$

۳۔ اگر لا کا مخدور ایسا بدلتا ہو جیسا ما کا مکعب اور لا = ۳ جب ما = ۴ تو ما کی قیمت دریافت کرو جب لا = $\frac{1}{۳۸}$

۴۔ ا ایسا بدلتا ہے جیسا ب اور ج بالاشتراك اگر ا = ۲ جب ب = $\frac{۳}{۵}$ اور ج = $\frac{1}{۶}$ تو ج کی قیمت معلوم کرو جب ا = ۵۴ اور ب = ۳

۵۔ اگر ا ایسا بدلتا ہو جیسا ج اور ب ایسا بدلتا ہو جیسا ج تو ا ± ب اور ما و ب ایسا بدلیں گے جیسا ج

۶۔ اگر ا ایسا بدلتا ہو جیسا ب ج تو ب بدلیگا بالعکس ج کے۔

۷۔ ف بدلتا ہے بالاستقامت ق کے اور بالعکس ر کے نیز ف = $\frac{۲}{۳}$ جب ق = $\frac{۳}{۵}$ اور ر = $\frac{۹}{۱۳}$ معلوم کرو ق جب ف = $\frac{۱۸}{۱۳}$

اور ر = ۷۵

۸۔ اگر لا ایسا بدلتا ہو جیسا $ما$ تو ثابت کرو کہ $لا + ما$ ایسا بدلے گا جیسا $لا - ما$

۹۔ اگر $ما$ ایسا بدلتا ہو جیسا دو مقادیر کا مجموعہ جن میں سے ایک مقدار بدلتی ہے بالاستقامت $لا$ کے اور دوسری بدلتی ہے بالعکس $لا$ کے اور اگر $ما = ۶$ جب $لا = ۴$ اور $ما = \frac{1}{3}$ جب $لا = ۳$ تو $لا$ اور $ما$ کے باہمی ربط کو مساوات کی صورت میں بیان کرو

۱۰۔ اگر $ما$ دو ایسی مقادیر کے مجموعہ کے برابر ہو جن میں سے ایک مقدار بدلتی ہو بالاستقامت $لا$ کے اور دوسری بالعکس $لا$ کے اور اگر $ما = ۱۹$ جب $لا = ۲$ یا ۳ تو $ما$ کو $لا$ کی رقوم میں دریافت کرو۔

۱۱۔ اگر $لا$ بدلتا ہو بالاستقامت $ب$ کے جذر کے اور بالعکس $ج$ کے نکتب کے اور اگر $لا = ۳$ جب $ب = ۲۵۶$ اور $ج = ۲$ تو $ب$ کی قیمت معلوم کرو جب $لا = ۲۴$ اور $ج = \frac{1}{4}$

۱۲۔ یہ معلوم ہے کہ $لا + ما$ ایسا بدلتا ہے جیسا $ی + \frac{1}{ی}$ اور $لا - ما$ ایسا بدلتا ہے جیسا $ی - \frac{1}{ی}$ باہمی ربط $لا$ اور $ی$ کا دریافت کرو۔

بشرطیکہ $ی = ۲$ جب $لا = ۳$ اور $ما = ۱$

۱۳۔ اگر $لا$ بدلتا ہے بالاشتراك $ب$ اور $ج$ کے جبکہ $ب$ ایسا بدلتا ہے جیسا $>$ اور $ج$ بدلتا ہے بالعکس $لا$ کے تو ثابت کرو کہ $لا$ ایسا بدلتا ہے جیسا $>$

۱۴۔ اگر $ما$ ایسا بدلتا ہے جیسا کہ تین مقادیر کا مجموعہ جن میں سے پہلی مقدار مستقل ہے دوسری مقدار ایسے بدلتی ہے جیسے $لا$ اور تیسری ایسے بدلتی ہے جیسے $لا$ اور اگر $ما = ۰$ جب $لا = ۱$ اور $ما = ۱$

جب $۲ = لا$ اور $۴ = ما$ جب $لا = ۳$ تو $ما$ کی قیمت دریافت کرو
جب $لا = ۷$

۱۵۔ جب ایک جسم حالت سکون سے ہوا میں گرتا ہے تو نقطہ ابتدائی سے اُس کا فاصلہ ایسا بدلتا ہے جیسا مجذور اُس وقت کا جو اُس نے گرنے میں صرف کیا ہو اگر ایک جسم $\frac{۱}{۲}$ ۴۰ فٹ ۵ سکڈ میں نیچے گرے تو دریافت کرو کہ ۱۰ سکڈ میں وہ کتنا گرے گا۔ نیز معلوم کرو کہ دسویں سکڈ میں کتنا گرے گا؟

۱۶۔ کسی گولے کا حجم ایسا بدلتا ہے جیسا اُس کے نصف قطر کا مکعب اور جب نصف قطر $\frac{۱}{۲}$ ۳ فٹ ہو تو حجم $\frac{۱}{۲}$ ۹ اے مکعب فٹ ہوتا ہے۔ اگر نصف قطر ۹ انچ ہو تو حجم دریافت کرو

۱۷۔ کسی گول ٹکیا کا وزن ایسا بدلتا ہے جیسا اُس کے نصف قطر کا مجذور اگر موٹائی مستقل ہو۔ اور ایسا بدلتا ہے جیسا کہ موٹائی جب نصف قطر مستقل ہو۔ ایسی دو ٹکیوں کی موٹائیوں کی باہمی نسبت ۹ : ۸ ہے اگر پہلی ٹکیا کا وزن دوسری کے وزن کا دو چہند ہو تو اُن کے نصف قطروں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۸۔ ایک کشتیوں کی دوڑ کی تقریب پر کسی ایک دن میں دوڑوں کی تعداد ایسے بدلتی ہے جیسے دنوں کی تعداد شروع تقریب سے اُس دن تک اور دنوں کی تعداد آخر تقریب سے اُس دن تک بالاشتراك جیکہ ہر دو صورتوں میں زیر بحث دن کو شامل کیا جائے۔ تین دنوں میں بالترتیب ۶ و ۵ و ۳ دوڑیں ہوئیں۔ معلوم کرو کہ یہ کون سے دن تھے اور تقریب کتنے دن رہی؟

۱۹۔ کسی ہیرے کی قیمت اُس کے وزن کے مجذور کے موافق بدلتی ہے
تین سوٹے کی انگوٹھیاں وزن میں برابر ہیں اور ان میں ہیرے جڑے
ہوئے ہیں۔ انگوٹھیوں کی قیمتیں جداگانہ ۱ پونڈ و ب پونڈ و ج پونڈ
ہیں اور انکے ہیروں کے اوزان بالترتیب ۳ و ۴ و ۵ رتی ہیں۔ نسبت
کرد کہ ایک رتی ہیرے کی قیمت $(\frac{1}{4} \text{ پونڈ} - \text{ب})$ پونڈ ہے اگر لاگت
سب انگوٹھوں کی یکساں ہو۔

۲۰۔ دو شخصوں کے وظیفے اُن کی ملازمت کی مدتوں کے جذر کے متناسب
ہیں (یک) نے دوسرے کی نسبت ۹ سال زیادہ خدمت کی ہے اور اُس کا
وظیفہ دوسرے کے وظیفہ سے ۵۰ روپیہ زیادہ ہے۔ اگر پہلے شخص کی
ملازمت کی مدت دوسرے کی مدت ملازمت سے $\frac{1}{4}$ ۴ سال زیادہ ہوتی تو
انکے وظیفوں میں نسبت ۹ : ۸ کی ہوتی معلوم کرد کہ انہوں نے کتنے
سال خدمت کی ہے اور اُن کے وظیفے جداگانہ کیا کیا
ہیں؟

۲۱۔ کسی سیارہ کی کشش اپنے چاندون پر بدلتی ہے بالاستقامت
اُس کی مقدار (م) کے۔ اور بدلتی ہے بالعکس فاصلہ (د) کے
مجذور کے۔ نیز کسی چاند کے عرصہ گردش کا مجذور بدلتا ہے بالاستقامت
اسکے بُعد کے اور بالعکس کشش تجاذب کے۔

اگر م د د ت کی مطابق قیمتیں م د د ت اور م د د ت
ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{م^۲ ت^۲}{د^۲} = \frac{م^۲ ت^۲}{د^۲}$$

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے مشتری (جیپٹر) کے اُس چاند کا عرصہ گردش معلوم کرو جس کے فاصلے کو ہمارے چاند کے فاصلے سے نسبت ۳۵ : ۳۱ کی ہے۔ اور یہ معلوم ہے کہ مشتری کی مقدار مادہ زمین کی مقدار مادہ کی ۳۴۳ گنی ہے اور ہمارے چاند کا عرصہ گردش ۳۲۶۶ دن ہے۔

۲۲۔ کسی انجن میں کوئلہ کا خرچ رفتار کے مجذور کے موافق بدلتا ہے جب رفتار ۱۶ میل فی گھنٹہ ہو تو ایک گھنٹہ میں ۲ ٹن کوئلہ صرف ہوتا ہے اگر ایک ٹن کوئلہ کی قیمت ۱۰ شلنگ ہو اور انجن پر دوسرے اخراجات ۱۱ شلنگ ۳ پنس فی گھنٹہ ہوں تو ۱۰۰ میل سفر کی کم سے کم لاگت دریافت کرو

باب چہارم

سلسلہ حسابیہ

۲۶۔ **تعریف**۔ جبر مقابلہ میں جب مقادیر اس طرح منسلک ہوں کہ ان کا باہمی تعلق کسی قانون کے مطابق ہو تو ایسی مقادیر کو سلسلہ کہتے ہیں۔

مگر بعض اوقات مجموعہ متعدد ارقام کو جن میں سے ہر ایک رقم کسی قانون مشترک کے مطابق مرتب کی گئی ہو سلسلہ کہتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ج (ن) کوئی جملہ ن کا ہے تب

ج (۱) + ج (۲) + ج (۳) + + ج (ر) + + ج (ن) (۱) کو سلسلہ کہیں گے۔

ج (۱) کو پہلی رقم اور ج (۲) کو دوسری رقم اور ج (ر) کو (ر) ویں رقم کہتے ہیں آئندہ رقم عامہ کو ہم ر دیں یا ع دیں رقم سے تعبیر کریں گے۔ فی الحال ہم ایسے سلسلوں پر غور کریں گے جن میں تعداد ارقام (ن) محدود ہو۔

فرض کرو کہ ج (ن) = ن تب ہمیں سلسلہ ذیل حاصل ہوگا

$$۱ + ۲ + ۳ + + ن (۲)$$

اگر ج (ن) = $\frac{۱}{۱ + ب ن}$ تو سلسلہ حاصل ہوگا۔

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} + \dots + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+(n+1)} \quad (۳)$$

اگر ج (ن) = $\frac{۱}{۱-n}$ تو سلسلہ ذیل حاصل ہوگا۔

$$\frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-2} + \frac{1}{1-3} + \dots + \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1-(n+1)}$$

$$+ \frac{1}{1-n} \quad (۴)$$

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی سلسلہ کی ن دیں رقم معلوم ہو تو ہم باقی سب ارقام ن کی جگہ متواتر ۱ و ۲ و ۳ رکھنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ن دیں رقم = $n + 2$ تو سلسلہ کی صورت تفصیلی یہ ہوگی۔

$$(1 \times 2 + 1) + (2 \times 2 + 2) + (3 \times 2 + 3) + \dots + (n \times 2 + n) + (n+2)$$

$$یا ۳ + ۸ + ۱۵ + \dots + (n \times 2 + n)$$

مگر یہ کہنا درست نہیں کہ جب پہلی چند رقیں دی ہوئی ہوں تو اُن سے رقم عامہ یا ن دیں رقم دریافت ہو سکتی ہے خصوصاً جبکہ اُس رقم کی صورت کے متعلق اور کچھ بھی معلوم نہ ہو اس امر کی توضیح آخری سلسلہ کی دوسری صورت سے بخوبی ہو سکتی ہے۔ جہاں پہلی چند رقیوں میں سلسلہ کا قانون ترکیب بالکل ضائع ہو چکا ہے۔

۴۷۔ تعریف۔ کسی فرق مشترک سے گھٹنے یا بڑھنے والے سلسلہ متغیر کو سلسلہ حسابیہ کہتے ہیں۔ اس قسم کے سلسلہ میں ہر ایک رقم یا قبل پر ایک مستقل مقدار (خواہ یہ مقدار مثبت ہو یا منفی)

پہلی رقم = ۱۰ اور فرق مشترک = ۲ -

$$\text{اسلئے } ۱۹ \text{ دیں رقم} = ۱۰ + (۱۹ - ۱) \times (۲ -) = ۱۰ - ۳۶$$

$$۲۶ - =$$

مثال ۲ - سلسلہ ۵ دے دے ۹ دے ۱۱ وغیرہ کی کوئی رقم ۲۵ کے برابر ہے ؟

فرض کرو کہ سلسلہ کی ر دیں رقم مطلوبہ ہے -

$$\text{تب } ۲۵ = ۵ + (۲ - ۱) \times ۲ = ۳ + ۲ \text{ جس سے } ۱۱ =$$

پس معلوم ہوا کہ سلسلہ معلومہ کی ۱۱ دیں رقم = ۲۵

مثال ۳ - سلسلہ (ن - ۱) ب + (ن - ۱) + ۱ + (ن - ۲) ب + ۱

+ کی ۸ دین رقم اور ۲۲ دیں رقم دریافت کرو

پہلی رقم = ن - ۱ - ب و فرق مشترک = (ن - ۱) - ۱ - (ن - ۱) ب

$$= (ن - ۲) ب + ۱ - [(ن - ۱) - ۱ - ب]$$

$$۸ \text{ دیں رقم} = ن - ۱ - ب + (۸ - ۱) (۱ - ب) =$$

$$= ن - ۱ - ب + ۷ - ۷ ب = ۷ - ۷ ب + (۸ - ۱) (۱ - ب)$$

$$۲ \text{ دیں رقم} = ن - ۱ - ب + (۲ - ۱) (۱ - ب) =$$

$$= ن - ۱ - ب + (۲ - ۱) (۱ - ب) =$$

$$= (۱ - ن) + ۲ (۱ - ب) = (۱ - ن) + ۲ (۱ - ب)$$

مثال ۴ - سلسلہ ۹ دے ۱۱ دے ۱۳ دے ۱۵ وغیرہ کی کوئی ارقام ۶۵ دے

۹۹ دے ۱۳ - ۵ (۲ + ۳) ہیں ؟ جواب - ۲۹ دیں دے ۴۶ دیں

و (۳ - ۱۰) دیں دے (۵ + ۴) دیں

مثال ۵ - کسی سلسلہ حسابیہ میں کل ۲۵ رتیں ہیں آخری رقم ۷۷ ہے

مثال ۲۔ سلسلہ ۱+۲+۳+۴+..... کا مجموعہ ۱۰۰ رقموں تک دریافت کرو
سلسلہ کی آخری رقم = ۱۰۰

۱۔ سلسلے مجموعہ مطلوبہ $= \frac{1}{2} \times 100 = (100 + 1) = 5050$
مثال ۳۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی ۵ رقموں کا مجموعہ ۳۵ ہے اسکی رقم
متوسط دریافت کرو۔

سلسلہ حسابیہ کی پانچ رقموں کے مجموعہ کو بغایت مختصر صورت میں لکھنے
کے لئے ان ارقام کو اس طرح لکھو ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۷-۱۸-۱۹-۲۰
اس صورت میں ۵ = مجموعہ = ۳۵ سلسلے رقم متوسط = ۷

مثال ۴۔ ایک سلسلہ کی پہلی رقم ۵ آخری رقم ۴۵ اور حاصل جمع
۴۰۰ ہے کل رقموں کی تعداد اور فرق مشترک معلوم کرو۔

اگر تعداد ارقام n ہو تو قانون جبریہ $v = \frac{n}{2} (1 + x)$ سے
جہاں v حاصل جمع ہے اور x آخری رقم $\frac{n}{2} = 400$ (۴۵+۵)

$$n = 16$$

اگر فرق مشترک f ہو تو $45 = 16$ دیں رقم $5 + 15 = f$

$$f = \frac{2}{3}$$

مثال ۵۔ سلسلہ $\frac{1-n}{n} + \frac{3-n}{n} + \frac{5-n}{n} + \dots$ کا

مجموعہ n رقموں تک دریافت کرو

فرق مشترک $= \frac{1-n}{n} - \frac{3-n}{n} = \frac{2}{n}$ پہلی رقم $= \frac{1-n}{n}$

اور $v = \frac{n}{2} \{ 1 + (n-1) \}$ بموجب نتیجہ (۲)

$\therefore v = \frac{n}{2} \left\{ \frac{2}{n} - x(n-1) + \frac{(1-n)}{n} \right\}$

ہیں ۲ اور ۸ کے درمیان اور اسی طرح سے اعداد $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ اور $\frac{1}{4}$ کا واسطہ حسابیہ ہیں انہی اعداد ۲ اور ۸ کے درمیان کیونکہ ہر دو سلسلے ۲ اور ۳، ۳ اور ۵، ۵ اور ۶، ۶ اور ۸ اور ۲ اور $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ اور حسابی سلسلے ہیں۔
نوٹ - مندرجہ بالا مثالوں سے ظاہر ہے کہ دو مقادیر کے درمیان واسطہ حسابیہ کے مختلف نظام غیر محدود ہیں۔

۵۱۔ دو مقادیر معلومہ ۱ اور ۲ کا واسطہ حسابی دریافت کرو۔
فرض کرو کہ لا واسطہ حسابی ہے اس لئے ۱ و ۲ کا واسطہ حسابیہ میں ہیں۔

$$\text{لا} - ۱ = ۲ - ۱ \text{ یعنی } ۱ = ۲ - ۱ + ۱$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{۱ + ۲}{۲}$$

$$\text{مثال} - \frac{1}{۲} \text{ اور } \frac{1}{۴} \text{ کا واسطہ حسابی} = \frac{\frac{1}{۲} + \frac{1}{۴}}{۲} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

۵۲۔ دو مقادیر معلوم کے درمیان متعدد واسطہ حسابیہ مندرج کرو۔
فرض کرو کہ ۱ اور ۲ مقادیر معلوم ہیں اور ان کے درمیان ن واسطہ حسابیہ مندرج کرنی ہیں۔ اگر ۱ اور ۲ کو بھی شامل کیا جائے تو کل ارقام مع ن واسطہ حسابیہ کے $۲ + ن$ ہونگی۔ اب ہمیں ایک ایسا سلسلہ حسابیہ معلوم کرنا ہے جس میں $۲ + ن$ ارقام ہوں اور جس کی پہلی اور ۲ آخری رقم ہو

اگر فرق مشترک = ف تو $۲ + ن = ۱ + ف$ دیں رقم

$$۱ + ف = ۲ + ن$$

$$\therefore ف = \frac{۲ - ۱}{۱ + ن}$$

اسلئے اواسط مطلوبہ ہیں $1 + \frac{b-1}{1+n}$ و $1 + \frac{2(b-1)}{1+n}$

و $1 + \frac{3(b-1)}{1+n}$ و $1 + \frac{n(b-1)}{1+n}$

مثال ۱۔ ۳ اور ۶ کے درمیان ۲۰ اواسط حسابیہ مندرج کرو۔

یہاں تعداد ارقام ۲۲ ہے اسلئے $3 + 21 = 24$ ف اگر ف فرق عام ہو
: ف $3 =$ اور سلسلہ ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ ہے

اسلئے اواسط مطلوبہ ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ ہیں

مثال ۲۔ کسی سلسلہ حسابیہ میں رقموں کی تعداد طاق ہے ثابت کرو
کہ درمیانی رقم کا دوچند پہلی اور آخری رقم کے مجموعے کے برابر ہے
چونکہ تعداد ارقام طاق ہے اسلئے اس کو $2n + 1$ سے تعبیر
کر سکتے ہیں۔ صریحاً درمیانی رقم کے دونوں طرف n ارقام ہیں۔
اسلئے یہ شروع اور آخر سے $(n + 1)$ دیں رقم ہے۔ فرض کر دو کہ
رقم متوسط m ہے۔

اسلئے $m = 1 + \frac{(n+1)-1}{2}$ ف جہاں ف فرق مشترک ہے

$1 + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}$ ف (۱)

نیز $m = 1 + \frac{(n+1)-1}{2}$ (ف) جہاں خ رقم آخر ہے

$m = \frac{n+1}{2}$ ف (۲)

اسلئے جمع کرنے سے $m = 1 + \frac{n}{2}$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ سلسلہ حسابیہ میں رقموں کی طاق تعداد کا
مجموعہ درمیانی رقم اور تعداد ارقام کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے
فرض کر دو کہ $2n + 1 =$ تعداد ارقام

رقموں کا مجموعہ $= \frac{1 + 2n}{2} (1 + x)$ جہاں ۱ اور x بالترتیب پہلی اور آخری رقمیں ہیں۔

$$= \frac{1 + 2n}{2} \times 2m \quad [\text{بوجب مثال سابق}]$$

$$= m(1 + 2n)$$

مثال ۳۔ ۱ اور ۱۹ کے درمیان اواسط حسابیہ کی تعداد دریافت کرو جبکہ دوسرے اوسط کی نسبت اوسط آخر سے ۶ : ۱ ہو۔

فرض کرو n = فرق مشترک اور n = تعداد اواسط اور دوسرا اوسط $= 1 + 2n$ اور آخر کا یعنی n وان اوسط $= 19 - n$

$$\text{اسلئے } \frac{1 + 2n}{n - 19} = \frac{1}{6} \text{ جس سے } 13 = n \text{ یا } 1 = 19 - n$$

اب چونکہ ۱۹ سلسلہ کی $(n + 2)$ دیں رقم ہے اسلئے

$$19 = 1 + (n + 1)n = n + 2$$

$$\text{اسلئے } n = 17$$

مثال ۵۔ ۱ اور ۲۱ کے درمیان اواسط حسابیہ کا ایک ایسا سلسلہ دریافت کرو جس میں اواسط کے مجموعے کی نسبت دسب سے بڑی اوسطوں کے مجموعے سے ۱۱ : ۳ ہو۔

جواب ۹ اوسط ۳۵۵ دے، وغیرہ ۱۹

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ کسی سلسلہ حسابیہ کی $(m - n)$ دیں اور $(m + n)$ دیں رقموں کا مجموعہ m دیں رقم کا دو چند ہوتا ہے۔

مثال ۷۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی $(n + 1)$ دیں رقم $\frac{m - 1}{n - 1}$ ہے $(2n + 1)$ رقموں تک سلسلے کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$28 = 24 - 4 = 24 - 4 = 20$$

$$38 = 52 - 92 = \text{ص} - \text{ص} = \text{ق}$$

$$28 = 92 - 120 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

پس سلسلہ کی پہلی ۵ رقیں ۸، ۱۸، ۲۸، ۳۸ اور ۴۸ ہیں۔

مثال ۲۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ارتقام کا مجموعہ $n + 1$ ہوتا ہے پہلی رقم اور فرق مشترک دریافت کرو

منقولہ ہے $n = n' + n''$

فرض کرد که $n = 1$ تب $ص = 1 + 2 = 5$

اگر $n = 2$ تو $ص = 8 + 4 = 12$

اسلئے ق = ص = ۵

اور $ق_2 = ص_2 - ص_1 = 5 - 12 = 7$

پس رقم اول = ۵ اور فرق مشترک = ۲

مثال ۳۔ خواہ ن کوئی قیمت اختیار کرے ص = پ ن + رن
اس سلسلہ کی م د میں رقم دریافت کرو۔

ص (یعنی ن رفوں کا حاصل جمع) = پ ن + ر ن

$$\text{اسٹے ص ن-۱} = \text{پ (ن-۱)} + \text{ر (ن-۱)}$$

پہلی ع ارقام کا حاصل جمع دریافت کرو
 پہلی رقم = $1 - 1 \times 3 = 2$ آخری رقم = $3 - 1 = 2$
 \therefore حاصل جمع = $\frac{2}{1} = \{2 + 2 - 1\} = \frac{2}{1} = (3 + 1)$

امثلہ نمبری ۴

- ۱۔ سلسلہ ۲ د $\frac{1}{3}$ د $\frac{1}{4}$ وغیرہ کا حاصل جمع ۲۰ رقموں تک یافت کرو
- ۲۔ " " ۳۹ د ۴۴ د ۳۹ " " ۱۴ " " " " " "
- ۳۔ " " $\frac{3}{4}$ د $\frac{2}{3}$ د $\frac{1}{4}$ " " ۱۹ " " " " " "
- ۴۔ " " ۳ د $\frac{2}{3}$ د $\frac{1}{4}$ " " ۱۰ " " " " " "
- ۵۔ " " ۳۶ ۴۵ ۳۶ ۲۵ ۳۵ ۳۶ ۴۵ " " ۱۶ " " " " " "
- ۶۔ " " $-\frac{1}{4}$ - ۴ - ۵ - ۴ - $\frac{1}{4}$ " " ۲۴ " " " " " "
- ۷۔ " " ۱۶ ۳ - ۱۵ ۳ - ۱۵ ۱۶ " " ۱۰ " " " " " "
- ۸۔ " " $\frac{4}{3}$ و ۳ ۳ د $\frac{12}{3}$ " " ۵۰ " " " " " "
- ۹۔ " " $\frac{3}{4}$ د $\frac{2}{3}$ د $\frac{1}{4}$ " " ۲۵ " " " " " "
- ۱۰۔ " " ۱ - ۳ ب ۲ - ۵ ب ۳ - ۱ ب ۴ - ۵ ب " " ۱۰ " " " " " "
- ۱۱۔ " " ۱ - ۲ ب ۳ - ۱ ب ۴ - ۵ ب " " ۱۰ " " " " " "
- ۱۲۔ " " $\frac{1}{2}$ ب، $\frac{1}{2}$ ب، $\frac{1}{2}$ ب " " ۲۱ " " " " " "
- ۱۳۔ " " $\frac{1}{2}$ - ۱، $\frac{2}{2}$ - ۲، $\frac{3}{2}$ - ۳ " " ۱۰ " " " " " "
- ۱۴۔ سلسلہ (۱ + لا) ۲ (۱ + لا) ۲ (۱ - لا) ۲ وغیرہ کا حاصل جمع ۱۰ رقموں تک یافت کرو

اُن کے کعبوں کا حاصل جمع ۴۰۸ ہے انہیں دریافت کرو۔

۳۱۔ کسی سلسلہ کی ن دیں رقم ۴ ن + ۱ ہے اُس کی ۱۵ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۲۔ کسی سلسلہ کی ع دیں رقم $\frac{ع}{۲} + ۲$ ہے اُس کی ۳۵ رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۳۔ کسی سلسلہ کی ن دیں رقم $\frac{ن}{۲} + ۲$ ہے اُس کی ع رقموں کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۴۔ سلسلہ $\frac{۱-۱۲}{۲}$ ، $\frac{۳-۱۲}{۲}$ ، $\frac{۵-۱۲}{۲}$ وغیرہ کا ن رقموں تک مجموعہ دریافت کرو۔

۵۴۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ میں ص ولادت کی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو ن کی قیمت دریافت کرنے کے لئے ہمیں ایک مساوات درجہ دوم حل کرنی پڑتی ہے

$$\text{اس طرح پرکہ } \frac{ن}{۲} = \{۱۲ + (ن - ۱) \times ۲\}$$

$$\text{یا } ۲ص = ۱۲ن + ۲ن - ۲$$

$$\text{یا } ۲ن + \frac{۱۲-۲}{۲} = \frac{۲ص}{۲}$$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے اور اس سے ن کی دو قیمتیں ملیں گی اگر ایک مثبت ہو اور دوسری منفی تو صرف قیمت مثبت کام کی ہے اور اگر دونوں مثبت ہوں تو معلوم ہوا کہ دو مجموعاتو مقادیر ایسے ہیں کہ شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک سلسلہ حسابیہ کا حاصل جمع ۵۴ ہے۔ پہلی رقم ۱ اور

فرق مشترک ۲- ہے اس کی تعداد ارقام دریافت کرو۔

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{۲} \{ ۱۲ + \text{ن} (۱ - \text{ن}) \} \text{ یعنی } \text{ص} = \text{ن} \{ ۱۲ + \text{ن} (۱ - \text{ن}) \}$$

$$\text{اسلئے } ۱۰۸ = \text{ن} \{ ۲۸ - ۲ (۱ - \text{ن}) \} \text{ یا } ۱۰۸ = ۲۸\text{ن} - ۲\text{ن} + ۲$$

$$\text{یعنی } ۱۵\text{ن} + ۵۴ = ۰$$

$$\text{یا } (۱۵ - \text{ن}) \left(\frac{۱۵}{۲} \right) - ۵۴ = - \frac{۲۲۵}{۲}$$

$$\text{یا } ۱۵ - \text{ن} = \frac{۱۵}{۲} \pm \frac{۳}{۲}$$

$$\therefore \text{ن} = ۹ \text{ یا } ۶$$

اگر سلسلے کی تمام رقمیں بالتفصیل لکھی جائیں ۳ اور ۱۲ اور ۱۰ اور ۸ اور ۶ اور ۴ اور ۲

۰ - ۱ - ۲ تو معلوم ہوا کہ ۶ رقموں کا مجموعہ ۵۴ ہے اور چونکہ

آخری تین رقموں کا مجموعہ صفر ہے اسلئے نو رقموں کا مجموعہ بھی ۵۴ ہے

مثال ۲- کتنی رقمیں سلسلہ ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ کی لی جائیں کہ

حاصل جمع ۶۶ ہو ؟

$$\text{یہاں } \frac{\text{ن}}{۲} \{ ۱۸ - ۳ (۱ - \text{ن}) \} = ۶۶$$

$$\text{یعنی } ۱۸\text{ن} - ۳\text{ن} = ۱۲۶ \text{ یا } (۱۸ - ۳)\text{ن} = ۱۲۶$$

$$\therefore \text{ن} = ۱۱ \text{ یا } ۳ \text{ اگر ہم سلسلہ کی ۱۱ رقمیں لیں یعنی}$$

۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ تو صریحاً

۶۶ حاصل جمع ۶۶ ہے اگر ہم آخری رقم سے شروع کریں اور پیچھے کی

طرف ۱۱ رقمیں گنیں تو بھی حاصل جمع ۶۶ ہے اس سے معلوم ہوا کہ اگرچہ

ن کی منفی قیمت ہمارے سوال کا پورا جواب نہیں ہے مگر پھر بھی اسے

ہم قابل فہم معنی دے سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ذیل سے ظاہر ہے۔

۵۵۔ اس نتیجہ کی تحقیق صورت عامہ میں اس طرح ہو سکتی ہے -
ن کی قیمت معلوم کرنے کے لئے مساوات ذیل ہے

$$ن^2 + (۱۲ - ن) - ۲ ص = ۰ \dots (۱)$$

اس سے ہمیں ن کی دو قیمتیں ملین گی۔ چونکہ فی الحال زیر بحث وہی عمل ہے جس میں ن کی ایک قیمت مثبت ہے دوسری منفی ہم ان کو ن اور -ن سے تعبیر کریں گے۔

سلسلہ کی ن ویں رقم = $۱ + (ن - ۱) ن$
اگر ہم اس رقم سے سترہ دے ہو کر پیچھے کی طرف گئیں تو فرق عام - ف ہوگا اور ن ارقام کا مجموعہ

$$= \frac{ن^2}{۲} - \frac{۱}{۲} \{ (ن - ۱) + (ن - ۲) + \dots + (۱ - ن) \}$$

اب ہم ثابت کریں گے کہ یہ ص کے برابر ہے۔

$$\text{جملہ} = \frac{ن^2}{۲} - \frac{۱}{۲} \{ (ن - ۱) + (ن - ۲) + \dots + (۱ - ن) \}$$

$$= \frac{۱}{۲} \{ ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ \}$$

$$= \frac{۱}{۲} \{ ۱۲ + ۱۱ + ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ \}$$

$$= \frac{۱}{۲} (۳ ص - ۲ ص) = ص \text{ کیونکہ } ن \text{ مساوات } ن^2$$

+ (۱۲ - ن) - ۲ ص = ۰ کی ایک قیمت ہے اور - ن اس مساوات کی دونوں قیمتوں کا حاصل ضرب ہے

نوٹ۔ اگر ن کی قیمت کسری ہو تو اس حل کے مطابق رقموں کی کوئی تعداد شرائط سوال کو پورا نہیں کرے گی۔

مثال ۱- کتنی رقمیں سلسلہ ۲۶، ۲۱، ۱۶، کی لی جائیں گے
حاصل جمع ۷۴ ہو؟

$$\text{یہاں } \frac{n}{2} = \{ (n-1) + 26 \}$$

$$\text{یعنی } 5n - 1 = 138 + n$$

$$\text{یا } (n-3)(5-3) = 34$$

∴ $n = 18$ یا $\frac{n}{2} = 9$ یہاں تعداد ارقام ۴ ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ اگر
۷۴ رقمیں سلسلہ کی لی جائیں تو حاصل جمع ۷۴ سے زیادہ ہے اور اگر ۸
لی جائیں تو کم۔

مثال ۲- کسی سلسلہ حسابیہ کا مجموعہ ۲۷ ہے رقم اول ۱ ہے اور فرق مشترک
۲- تعداد ارقام دریافت کرو اور ہر دو جوابات کی تشریح سلسلہ کی صورت مفصلہ سے

کرو۔ جواب ۶ یا ۱۲

مثال ۳- سلسلہ ۸-۶-۴-۲-۰ وغیرہ کی کتنی رقموں کا مجموعہ ۵۲ ہوگا؟

جواب ۱۳ یا ۴

۵۶- ہم اس جگہ سلسلہ حسابیہ کی چند متفرق مثالیں دیں گے۔

مثال ۱- کسی سلسلہ حسابیہ کی پ ارقام کا مجموعہ n ہے اور q
ارقام کا مجموعہ p ہے۔ اس کی $(p+q)$ رقموں کا حاصل جمع
دریافت کرو

فرض کرو کہ ۱ = رقم اول اور $n =$ فرق مشترک چونکہ پ رقموں کا
مجموعہ = q

$$1 + \{ (p-1) + 1 \} \frac{p}{2} = q$$

$$(۱) \text{ یا } ۲ ق = پ \times ۱۲ + پ (پ - ۱) - ف \text{ ----- } (۱)$$

$$(۲) \text{ اسی طرح سے } ۲ پ = ق \times ۱۲ + ق (ق - ۱) - ف \text{ ----- } (۲)$$

(۱) سے (۲) کو تفریق کرنے سے

$$۲ (ق - پ) = (پ - ق) (ق - ۱) - (پ - ق) (ق - ۱) - ف$$

$$= (پ - ق) (ق - ۱) + ۱۲ (پ - ق) - (پ + ق - ۱) ف$$

$$۲ - ۲ = ۲ - ۲ + (پ + ق - ۱) ف$$

اسلئے (پ + ق) رقموں کا حاصل جمع

$$= \frac{پ + ق}{۲} \times \{۱۲ + (پ + ق - ۱) ف\}$$

$$= \frac{پ + ق}{۲} \times (۲ - ۲) = - (پ + ق)$$

مثال ۲۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی پ دیں رقم ۱۰ سے اور ق دیں رقم ۱۰
ب ثابت کر دو کہ پہلی (پ + ق) ارقام کا حاصل جمع = $\frac{پ + ق}{۲} \{۱۲ + (پ + ق - ۱) ف\}$
فرض کر دو کہ سلسلہ مجوزہ کی رقم اول = لا اور فرق مشترک = ما

$$تب ۱ = لا + (پ - ۱) ما$$

$$اور ۲ = لا + (ق - ۱) ما$$

$$(۱) \text{ اسلئے } ۱ - ۲ = (پ - ق) ما \text{ ----- } (۱)$$

$$(۲) \text{ اور } ۱ + ۲ = ۲ لا + (پ + ق - ۲) ما \text{ ----- } (۲)$$

اسلئے (پ + ق) رقموں کا حاصل جمع

$$= \frac{پ + ق}{۲} \{۱۲ + (پ + ق - ۱) ما\}$$

$$= \frac{پ + ق}{۲} \{۱۲ + [۱۲ (پ + ق - ۲) + ۲ ما]\}$$

$$= \frac{پ + ق}{۲} \{۱۲ + ۱۲ (پ + ق - ۲) + ۲ ما\}$$

مثال ۳۔ دو حسابی سلسلوں کے مجموعات ن ارتام کی
 باہمی نسبت ۷ ن ۱۴ : ۱۴ ن ۲۷ ہے اُن کی ۱۱ ویں رقموں
 کی نسبت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ دونوں سلسلوں کی پہلی رقمیں اور فرق مشترک بالترتیب

ادب اور ادب ہیں۔

بوجب شرائط سوال $\frac{1 + \frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{1 + \frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m}}$ اب ہمیں

کی قیمت معلوم کرنی ہے۔ اسلئے فرض کرو کہ $n = 1$

اس سے حاصل ہوگا $\frac{138}{111} = \frac{20 + \frac{12}{3}}{20 + \frac{12}{3}}$ پس نسبت $\frac{138}{111}$

مطلوبہ ۴ : ۳ ہے۔

مثال ۴۔ اگر ص، و ص، و ص، و ص، مجموعات ن ارقام

ایسے حسابیہ سلسلوں کے ہوں جن کی پہلی رقمیں ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰ ہیں۔

اور فرق مشترک ۱، ۳، ۵، ۷۔ ہیں تو ص + ص + ص + + ص پ
کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{(1+n)n}{2} = \left\{ (1-n) + 2 \right\} \frac{n}{2} = 1$$

$$\frac{(1+n^3)n}{2} = \left\{ 3(1-n) + 4 \right\} \frac{n}{2} = \text{م. ۲}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \left\{ 5(1-n) + 4 \right\} \frac{n}{2} = 3$$

$$\{1 + 0(1 - p_2)\} \frac{C}{r} = \{(1 - p_2)(1 - n) + p_2\} \frac{C}{r} = \text{می}$$

سلسلے مجموعہ مطلوبہ = $\frac{n}{4} \{ (1+n) + (1+n+1) + \dots + (1+n+1-p) + (1+n) \}$

$$\begin{aligned} \frac{ن}{۴} &= \{ (ن + ن۳ + ن۵ + + ۲ - ۱ \times ن) + پ \} \\ \frac{ن}{۲} &= \{ (ن + ۱ + ۳ + ۵ + + ۲ - ۱) + پ \} \\ \frac{ن}{۴} &= (ن پ + ۲ پ) = \frac{ن پ}{۴} = (ن پ + ۱) \end{aligned}$$

مثال ۵۔ اگر سلسلہ ۲ و ۵ و ۸ و اور سلسلہ ۳ و ۷ و ۱۱ و کو سوچو
ارقام تک مفصل لکھا جائے تو معلوم کرو کہ ان میں کتنی ارقام متماثل ہوں گی
فرض کرو کہ پہلے سلسلہ کی لا دیں اور دوسرے سلسلہ کی ما دیں نہیں
متماثل ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{تب } ۲ + (۱ - لا) \times ۳ &= ۳ + (۱ - ما) \times ۴ \quad \text{یا } ۳ - لا = ۱ - ما \\ \text{اسلئے } ۳ - لا = ما \quad \text{یعنی } \frac{۳}{۴} &= \frac{لا}{ما} \end{aligned}$$

اسلئے ضروری ہے کہ $\frac{۳}{۴} = \frac{لا}{ما}$ یا $\frac{۴}{۳} = \frac{لا}{ما}$ یا $\frac{۸}{۴} = \frac{لا}{ما}$ یا $\frac{۱۲}{۴} = \frac{لا}{ما}$ اور علیٰ ہذا القیاس
پس معلوم ہوا کہ لا کی قیمتیں ہیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ اور
علیٰ ہذا القیاس۔ اور چونکہ لا کی بڑی سے بڑی قیمت ۲۵ ہو سکتی
ہے اسلئے معلوم ہوا کہ لا اور ما کی قیمتوں کے ۲۵ زوج ہیں۔

پس دونوں سلسلوں میں متماثل ارقام کی تعداد = ۲۵

مثال ۶۔ اگر صں سے ایک سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کا حاصل جمع تعبیر
ہو تو ثابت کرو کہ صں - ۳ صں + ۲ صں + ۱ صں = صں

فرض کرو کہ قن = ن دیں رقم اور ن = فرق مشترک

$$\text{تب صں} = ۳ + ۲ + ۱ + صں$$

$$\begin{aligned}
 &= (\text{ص} + ۳ - \text{ص} + ۲) - (\text{ص} + ۲ - \text{ص} + ۱) + (\text{ص} + ۱ - \text{ص}) \\
 &= (\text{ن} + ۳) \text{ دین رقم} - ۲ \{ (\text{ن} + ۲) \text{ دین رقم} \} + (\text{ن} + ۱) \text{ دین رقم} \\
 &= \text{ق} + ۳ - ۲ \text{ ق} + ۲ - \text{ق} + ۱ = (\text{ق} + ۳ - \text{ق} + ۲ - \text{ق} + ۱) \\
 &= ۰ = \text{ق} - \text{ق} = ۰
 \end{aligned}$$

امثلہ نمبری ۵

۱۔ معلوم ہے ۱ = ۲ - ۲ و ۴ = ۳ د ص = ۱۶۰ دریافت کرو ن۔

۲۔ کتنی ارقام سلسلہ ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و کی لی جائیں کہ مجموعہ ۲۰۸ کے برابر ہو؟

۳۔ کسی سلسلہ حسابیہ میں تیسری رقم پہلی رقم کی چارگنی ہے اور چھٹی رقم ۱ ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۴۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی دوسری و ۳۱ دین اور آخری رقمیں بالترتیب $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ ہیں۔ رقم اول اور تعداد ارقام دریافت کرو۔

۵۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی چوتھی و ۴۲ دین اور آخری رقمیں بالترتیب ۱۰ و ۹۵ ہیں پہلی رقم اور کل تعداد ارقام دریافت کرو۔

۶۔ ایک شخص پر ۳۶۰۰ روپیہ قرض ہے وہ اسے ۳۰ قسطوں میں ادا کرنا چاہتا ہے جو کہ سلسلہ حسابیہ میں ہیں ۳۰ قسطیں ادا کرنے کے بعد وہ فوت ہو گیا اور اس کے قرض کا ایک تہائی حصہ ادا کرنا باقی رہا

پہلی قسط کی قیمت دریافت کرو۔

۷۔ دو اعداد کا مجموعہ $2\frac{1}{4}$ ہے ان کے درمیان اواسط حسابیہ کی قیمت تعداد مندرج کی گئی ہے اواسط کا مجموعہ ان کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔ اواسط کی تعداد معلوم کرو۔

۸۔ سلسلہ ۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰، ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۲، ۳۵، ۳۸، ۴۱، ۴۴، ۴۷، ۵۰، ۵۳، ۵۶، ۵۹، ۶۲، ۶۵، ۶۸، ۷۱، ۷۴، ۷۷، ۸۰، ۸۳، ۸۶، ۸۹، ۹۲، ۹۵، ۹۸، ۱۰۱، ۱۰۴، ۱۰۷، ۱۱۰، ۱۱۳، ۱۱۶، ۱۱۹، ۱۲۲، ۱۲۵، ۱۲۸، ۱۳۱، ۱۳۴، ۱۳۷، ۱۴۰، ۱۴۳، ۱۴۶، ۱۴۹، ۱۵۲، ۱۵۵، ۱۵۸، ۱۶۱، ۱۶۴، ۱۶۷، ۱۷۰، ۱۷۳، ۱۷۶، ۱۷۹، ۱۸۲، ۱۸۵، ۱۸۸، ۱۹۱، ۱۹۴، ۱۹۷، ۲۰۰، ۲۰۳، ۲۰۶، ۲۰۹، ۲۱۲، ۲۱۵، ۲۱۸، ۲۲۱، ۲۲۴، ۲۲۷، ۲۳۰، ۲۳۳، ۲۳۶، ۲۳۹، ۲۴۲، ۲۴۵، ۲۴۸، ۲۵۱، ۲۵۴، ۲۵۷، ۲۶۰، ۲۶۳، ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۷۲، ۲۷۵، ۲۷۸، ۲۸۱، ۲۸۴، ۲۸۷، ۲۹۰، ۲۹۳، ۲۹۶، ۲۹۹، ۳۰۲، ۳۰۵، ۳۰۸، ۳۱۱، ۳۱۴، ۳۱۷، ۳۲۰، ۳۲۳، ۳۲۶، ۳۲۹، ۳۳۲، ۳۳۵، ۳۳۸، ۳۴۱، ۳۴۴، ۳۴۷، ۳۵۰، ۳۵۳، ۳۵۶، ۳۵۹، ۳۶۲، ۳۶۵، ۳۶۸، ۳۷۱، ۳۷۴، ۳۷۷، ۳۸۰، ۳۸۳، ۳۸۶، ۳۸۹، ۳۹۲، ۳۹۵، ۳۹۸، ۴۰۱، ۴۰۴، ۴۰۷، ۴۱۰، ۴۱۳، ۴۱۶، ۴۱۹، ۴۲۲، ۴۲۵، ۴۲۸، ۴۳۱، ۴۳۴، ۴۳۷، ۴۴۰، ۴۴۳، ۴۴۶، ۴۴۹، ۴۵۲، ۴۵۵، ۴۵۸، ۴۶۱، ۴۶۴، ۴۶۷، ۴۷۰، ۴۷۳، ۴۷۶، ۴۷۹، ۴۸۲، ۴۸۵، ۴۸۸، ۴۹۱، ۴۹۴، ۴۹۷، ۵۰۰، ۵۰۳، ۵۰۶، ۵۰۹، ۵۱۲، ۵۱۵، ۵۱۸، ۵۲۱، ۵۲۴، ۵۲۷، ۵۳۰، ۵۳۳، ۵۳۶، ۵۳۹، ۵۴۲، ۵۴۵، ۵۴۸، ۵۵۱، ۵۵۴، ۵۵۷، ۵۶۰، ۵۶۳، ۵۶۶، ۵۶۹، ۵۷۲، ۵۷۵، ۵۷۸، ۵۸۱، ۵۸۴، ۵۸۷، ۵۹۰، ۵۹۳، ۵۹۶، ۵۹۹، ۶۰۲، ۶۰۵، ۶۰۸، ۶۱۱، ۶۱۴، ۶۱۷، ۶۲۰، ۶۲۳، ۶۲۶، ۶۲۹، ۶۳۲، ۶۳۵، ۶۳۸، ۶۴۱، ۶۴۴، ۶۴۷، ۶۵۰، ۶۵۳، ۶۵۶، ۶۵۹، ۶۶۲، ۶۶۵، ۶۶۸، ۶۷۱، ۶۷۴، ۶۷۷، ۶۸۰، ۶۸۳، ۶۸۶، ۶۸۹، ۶۹۲، ۶۹۵، ۶۹۸، ۷۰۱، ۷۰۴، ۷۰۷، ۷۱۰، ۷۱۳، ۷۱۶، ۷۱۹، ۷۲۲، ۷۲۵، ۷۲۸، ۷۳۱، ۷۳۴، ۷۳۷، ۷۴۰، ۷۴۳، ۷۴۶، ۷۴۹، ۷۵۲، ۷۵۵، ۷۵۸، ۷۶۱، ۷۶۴، ۷۶۷، ۷۷۰، ۷۷۳، ۷۷۶، ۷۷۹، ۷۸۲، ۷۸۵، ۷۸۸، ۷۹۱، ۷۹۴، ۷۹۷، ۸۰۰، ۸۰۳، ۸۰۶، ۸۰۹، ۸۱۲، ۸۱۵، ۸۱۸، ۸۲۱، ۸۲۴، ۸۲۷، ۸۳۰، ۸۳۳، ۸۳۶، ۸۳۹، ۸۴۲، ۸۴۵، ۸۴۸، ۸۵۱، ۸۵۴، ۸۵۷، ۸۶۰، ۸۶۳، ۸۶۶، ۸۶۹، ۸۷۲، ۸۷۵، ۸۷۸، ۸۸۱، ۸۸۴، ۸۸۷، ۸۹۰، ۸۹۳، ۸۹۶، ۸۹۹، ۹۰۲، ۹۰۵، ۹۰۸، ۹۱۱، ۹۱۴، ۹۱۷، ۹۲۰، ۹۲۳، ۹۲۶، ۹۲۹، ۹۳۲، ۹۳۵، ۹۳۸، ۹۴۱، ۹۴۴، ۹۴۷، ۹۵۰، ۹۵۳، ۹۵۶، ۹۵۹، ۹۶۲، ۹۶۵، ۹۶۸، ۹۷۱، ۹۷۴، ۹۷۷، ۹۸۰، ۹۸۳، ۹۸۶، ۹۸۹، ۹۹۲، ۹۹۵، ۹۹۸، ۱۰۰۱، ۱۰۰۴، ۱۰۰۷، ۱۰۱۰، ۱۰۱۳، ۱۰۱۶، ۱۰۱۹، ۱۰۲۲، ۱۰۲۵، ۱۰۲۸، ۱۰۳۱، ۱۰۳۴، ۱۰۳۷، ۱۰۴۰، ۱۰۴۳، ۱۰۴۶، ۱۰۴۹، ۱۰۵۲، ۱۰۵۵، ۱۰۵۸، ۱۰۶۱، ۱۰۶۴، ۱۰۶۷، ۱۰۷۰، ۱۰۷۳، ۱۰۷۶، ۱۰۷۹، ۱۰۸۲، ۱۰۸۵، ۱۰۸۸، ۱۰۹۱، ۱۰۹۴، ۱۰۹۷، ۱۱۰۰، ۱۱۰۳، ۱۱۰۶، ۱۱۰۹، ۱۱۱۲، ۱۱۱۵، ۱۱۱۸، ۱۱۲۱، ۱۱۲۴، ۱۱۲۷، ۱۱۳۰، ۱۱۳۳، ۱۱۳۶، ۱۱۳۹، ۱۱۴۲، ۱۱۴۵، ۱۱۴۸، ۱۱۵۱، ۱۱۵۴، ۱۱۵۷، ۱۱۶۰، ۱۱۶۳، ۱۱۶۶، ۱۱۶۹، ۱۱۷۲، ۱۱۷۵، ۱۱۷۸، ۱۱۸۱، ۱۱۸۴، ۱۱۸۷، ۱۱۹۰، ۱۱۹۳، ۱۱۹۶، ۱۱۹۹، ۱۲۰۲، ۱۲۰۵، ۱۲۰۸، ۱۲۱۱، ۱۲۱۴، ۱۲۱۷، ۱۲۲۰، ۱۲۲۳، ۱۲۲۶، ۱۲۲۹، ۱۲۳۲، ۱۲۳۵، ۱۲۳۸، ۱۲۴۱، ۱۲۴۴، ۱۲۴۷، ۱۲۵۰، ۱۲۵۳، ۱۲۵۶، ۱۲۵۹، ۱۲۶۲، ۱۲۶۵، ۱۲۶۸، ۱۲۷۱، ۱۲۷۴، ۱۲۷۷، ۱۲۸۰، ۱۲۸۳، ۱۲۸۶، ۱۲۸۹، ۱۲۹۲، ۱۲۹۵، ۱۲۹۸، ۱۳۰۱، ۱۳۰۴، ۱۳۰۷، ۱۳۱۰، ۱۳۱۳، ۱۳۱۶، ۱۳۱۹، ۱۳۲۲، ۱۳۲۵، ۱۳۲۸، ۱۳۳۱، ۱۳۳۴، ۱۳۳۷، ۱۳۴۰، ۱۳۴۳، ۱۳۴۶، ۱۳۴۹، ۱۳۵۲، ۱۳۵۵، ۱۳۵۸، ۱۳۶۱، ۱۳۶۴، ۱۳۶۷، ۱۳۷۰، ۱۳۷۳، ۱۳۷۶، ۱۳۷۹، ۱۳۸۲، ۱۳۸۵، ۱۳۸۸، ۱۳۹۱، ۱۳۹۴، ۱۳۹۷، ۱۴۰۰، ۱۴۰۳، ۱۴۰۶، ۱۴۰۹، ۱۴۱۲، ۱۴۱۵، ۱۴۱۸، ۱۴۲۱، ۱۴۲۴، ۱۴۲۷، ۱۴۳۰، ۱۴۳۳، ۱۴۳۶، ۱۴۳۹، ۱۴۴۲، ۱۴۴۵، ۱۴۴۸، ۱۴۵۱، ۱۴۵۴، ۱۴۵۷، ۱۴۶۰، ۱۴۶۳، ۱۴۶۶، ۱۴۶۹، ۱۴۷۲، ۱۴۷۵، ۱۴۷۸، ۱۴۸۱، ۱۴۸۴، ۱۴۸۷، ۱۴۹۰، ۱۴۹۳، ۱۴۹۶، ۱۴۹۹، ۱۵۰۲، ۱۵۰۵، ۱۵۰۸، ۱۵۱۱، ۱۵۱۴، ۱۵۱۷، ۱۵۲۰، ۱۵۲۳، ۱۵۲۶، ۱۵۲۹، ۱۵۳۲، ۱۵۳۵، ۱۵۳۸، ۱۵۴۱، ۱۵۴۴، ۱۵۴۷، ۱۵۵۰، ۱۵۵۳، ۱۵۵۶، ۱۵۵۹، ۱۵۶۲، ۱۵۶۵، ۱۵۶۸، ۱۵۷۱، ۱۵۷۴، ۱۵۷۷، ۱۵۸۰، ۱۵۸۳، ۱۵۸۶، ۱۵۸۹، ۱۵۹۲، ۱۵۹۵، ۱۵۹۸، ۱۶۰۱، ۱۶۰۴، ۱۶۰۷، ۱۶۱۰، ۱۶۱۳، ۱۶۱۶، ۱۶۱۹، ۱۶۲۲، ۱۶۲۵، ۱۶۲۸، ۱۶۳۱، ۱۶۳۴، ۱۶۳۷، ۱۶۴۰، ۱۶۴۳، ۱۶۴۶، ۱۶۴۹، ۱۶۵۲، ۱۶۵۵، ۱۶۵۸، ۱۶۶۱، ۱۶۶۴، ۱۶۶۷، ۱۶۷۰، ۱۶۷۳، ۱۶۷۶، ۱۶۷۹، ۱۶۸۲، ۱۶۸۵، ۱۶۸۸، ۱۶۹۱، ۱۶۹۴، ۱۶۹۷، ۱۷۰۰، ۱۷۰۳، ۱۷۰۶، ۱۷۰۹، ۱۷۱۲، ۱۷۱۵، ۱۷۱۸، ۱۷۲۱، ۱۷۲۴، ۱۷۲۷، ۱۷۳۰، ۱۷۳۳، ۱۷۳۶، ۱۷۳۹، ۱۷۴۲، ۱۷۴۵، ۱۷۴۸، ۱۷۵۱، ۱۷۵۴، ۱۷۵۷، ۱۷۶۰، ۱۷۶۳، ۱۷۶۶، ۱۷۶۹، ۱۷۷۲، ۱۷۷۵، ۱۷۷۸، ۱۷۸۱، ۱۷۸۴، ۱۷۸۷، ۱۷۹۰، ۱۷۹۳، ۱۷۹۶، ۱۷۹۹، ۱۸۰۲، ۱۸۰۵، ۱۸۰۸، ۱۸۱۱، ۱۸۱۴، ۱۸۱۷، ۱۸۲۰، ۱۸۲۳، ۱۸۲۶، ۱۸۲۹، ۱۸۳۲، ۱۸۳۵، ۱۸۳۸، ۱۸۴۱، ۱۸۴۴، ۱۸۴۷، ۱۸۵۰، ۱۸۵۳، ۱۸۵۶، ۱۸۵۹، ۱۸۶۲، ۱۸۶۵، ۱۸۶۸، ۱۸۷۱، ۱۸۷۴، ۱۸۷۷، ۱۸۸۰، ۱۸۸۳، ۱۸۸۶، ۱۸۸۹، ۱۸۹۲، ۱۸۹۵، ۱۸۹۸، ۱۹۰۱، ۱۹۰۴، ۱۹۰۷، ۱۹۱۰، ۱۹۱۳، ۱۹۱۶، ۱۹۱۹، ۱۹۲۲، ۱۹۲۵، ۱۹۲۸، ۱۹۳۱، ۱۹۳۴، ۱۹۳۷، ۱۹۴۰، ۱۹۴۳، ۱۹۴۶، ۱۹۴۹، ۱۹۵۲، ۱۹۵۵، ۱۹۵۸، ۱۹۶۱، ۱۹۶۴، ۱۹۶۷، ۱۹۷۰، ۱۹۷۳، ۱۹۷۶، ۱۹۷۹، ۱۹۸۲، ۱۹۸۵، ۱۹۸۸، ۱۹۹۱، ۱۹۹۴، ۱۹۹۷، ۲۰۰۰، ۲۰۰۳، ۲۰۰۶، ۲۰۰۹، ۲۰۱۲، ۲۰۱۵، ۲۰۱۸، ۲۰۲۱، ۲۰۲۴، ۲۰۲۷، ۲۰۳۰، ۲۰۳۳، ۲۰۳۶، ۲۰۳۹، ۲۰۴۲، ۲۰۴۵، ۲۰۴۸، ۲۰۵۱، ۲۰۵۴، ۲۰۵۷، ۲۰۶۰، ۲۰۶۳، ۲۰۶۶، ۲۰۶۹، ۲۰۷۲، ۲۰۷۵، ۲۰۷۸، ۲۰۸۱، ۲۰۸۴، ۲۰۸۷، ۲۰۹۰، ۲۰۹۳، ۲۰۹۶، ۲۰۹۹، ۲۱۰۲، ۲۱۰۵، ۲۱۰۸، ۲۱۱۱، ۲۱۱۴، ۲۱۱۷، ۲۱۲۰، ۲۱۲۳، ۲۱۲۶، ۲۱۲۹، ۲۱۳۲، ۲۱۳۵، ۲۱۳۸، ۲۱۴۱، ۲۱۴۴، ۲۱۴۷، ۲۱۵۰، ۲۱۵۳، ۲۱۵۶، ۲۱۵۹، ۲۱۶۲، ۲۱۶۵، ۲۱۶۸، ۲۱۷۱، ۲۱۷۴، ۲۱۷۷، ۲۱۸۰، ۲۱۸۳، ۲۱۸۶، ۲۱۸۹، ۲۱۹۲، ۲۱۹۵، ۲۱۹۸، ۲۲۰۱، ۲۲۰۴، ۲۲۰۷، ۲۲۱۰، ۲۲۱۳، ۲۲۱۶، ۲۲۱۹، ۲۲۲۲، ۲۲۲۵، ۲۲۲۸، ۲۲۳۱، ۲۲۳۴، ۲۲۳۷، ۲۲۴۰، ۲۲۴۳، ۲۲۴۶، ۲۲۴۹، ۲۲۵۲، ۲۲۵۵، ۲۲۵۸، ۲۲۶۱، ۲۲۶۴، ۲۲۶۷، ۲۲۷۰، ۲۲۷۳، ۲۲۷۶، ۲۲۷۹، ۲۲۸۲، ۲۲۸۵، ۲۲۸۸، ۲۲۹۱، ۲۲۹۴، ۲۲۹۷، ۲۳۰۰، ۲۳۰۳، ۲۳۰۶، ۲۳۰۹، ۲۳۱۲، ۲۳۱۵، ۲۳۱۸، ۲۳۲۱، ۲۳۲۴، ۲۳۲۷، ۲۳۳۰، ۲۳۳۳، ۲۳۳۶، ۲۳۳۹، ۲۳۴۲، ۲۳۴۵، ۲۳۴۸، ۲۳۵۱، ۲۳۵۴، ۲۳۵۷، ۲۳۶۰، ۲۳۶۳، ۲۳۶۶، ۲۳۶۹، ۲۳۷۲، ۲۳۷۵، ۲۳۷۸، ۲۳۸۱، ۲۳۸۴، ۲۳۸۷، ۲۳۹۰، ۲۳۹۳، ۲۳۹۶، ۲۳۹۹، ۲۴۰۲، ۲۴۰۵، ۲۴۰۸، ۲۴۱۱، ۲۴۱۴، ۲۴۱۷، ۲۴۲۰، ۲۴۲۳، ۲۴۲۶، ۲۴۲۹، ۲۴۳۲، ۲۴۳۵، ۲۴۳۸، ۲۴۴۱، ۲۴۴۴، ۲۴۴۷، ۲۴۵۰، ۲۴۵۳، ۲۴۵۶، ۲۴۵۹، ۲۴۶۲، ۲۴۶۵، ۲۴۶۸، ۲۴۷۱، ۲۴۷۴، ۲۴۷۷، ۲۴۸۰، ۲۴۸۳، ۲۴۸۶، ۲۴۸۹، ۲۴۹۲، ۲۴۹۵، ۲۴۹۸، ۲۵۰۱، ۲۵۰۴، ۲۵۰۷، ۲۵۱۰، ۲۵۱۳، ۲۵۱۶، ۲۵۱۹، ۲۵۲۲، ۲۵۲۵، ۲۵۲۸، ۲۵۳۱، ۲۵۳۴، ۲۵۳۷، ۲۵۴۰، ۲۵۴۳، ۲۵۴۶، ۲۵۴۹، ۲۵۵۲، ۲۵۵۵، ۲۵۵۸، ۲۵۶۱، ۲۵۶۴، ۲۵۶۷، ۲۵۷۰، ۲۵۷۳، ۲۵۷۶، ۲۵۷۹، ۲۵۸۲، ۲۵۸۵، ۲۵۸۸، ۲۵۹۱، ۲۵۹۴، ۲۵۹۷، ۲۶۰۰، ۲۶۰۳، ۲۶۰۶، ۲۶۰۹، ۲۶۱۲، ۲۶۱۵، ۲۶۱۸، ۲۶۲۱، ۲۶۲۴، ۲۶۲۷، ۲۶۳۰، ۲۶۳۳، ۲۶۳۶، ۲۶۳۹، ۲۶۴۲، ۲۶۴۵، ۲۶۴۸، ۲۶۵۱، ۲۶۵۴، ۲۶۵۷، ۲۶۶۰، ۲۶۶۳، ۲۶۶۶، ۲۶۶۹، ۲۶۷۲، ۲۶۷۵، ۲۶۷۸، ۲۶۸۱، ۲۶۸۴، ۲۶۸۷، ۲۶۹۰، ۲۶۹۳، ۲۶۹۶، ۲۶۹۹، ۲۷۰۲، ۲۷۰۵، ۲۷۰۸، ۲۷۱۱، ۲۷۱۴، ۲۷۱۷، ۲۷۲۰، ۲۷۲۳، ۲۷۲۶، ۲۷۲۹، ۲۷۳۲، ۲۷۳۵، ۲۷۳۸، ۲۷۴۱، ۲۷۴۴، ۲۷۴۷، ۲۷۵۰، ۲۷۵۳، ۲۷۵۶، ۲۷۵۹، ۲۷۶۲، ۲۷۶۵، ۲۷۶۸، ۲۷۷۱، ۲۷۷۴، ۲۷۷۷، ۲۷۸۰، ۲۷۸۳، ۲۷۸۶، ۲۷۸۹، ۲۷۹۲، ۲۷۹۵، ۲۷۹۸، ۲۸۰۱، ۲۸۰۴، ۲۸۰۷، ۲۸۱۰، ۲۸۱۳، ۲۸۱۶، ۲۸۱۹، ۲۸۲۲، ۲۸۲۵، ۲۸۲۸، ۲۸۳۱، ۲۸۳۴، ۲۸۳۷، ۲۸۴۰، ۲۸۴۳، ۲۸۴۶، ۲۸۴۹، ۲۸۵۲، ۲۸۵۵، ۲۸۵۸، ۲۸۶۱، ۲۸۶۴، ۲۸۶۷، ۲۸۷۰، ۲۸۷۳، ۲۸۷۶، ۲۸۷۹، ۲۸۸۲، ۲۸۸۵، ۲۸۸۸، ۲۸۹۱، ۲۸۹۴، ۲۸۹۷، ۲۹۰۰، ۲۹۰۳، ۲۹۰۶، ۲۹۰۹، ۲۹۱۲، ۲۹۱۵، ۲۹۱۸، ۲۹۲۱، ۲۹۲۴، ۲۹۲۷، ۲۹۳۰، ۲۹۳۳، ۲۹۳۶، ۲۹۳۹، ۲۹۴۲، ۲۹۴۵، ۲۹۴۸، ۲۹۵۱، ۲۹۵۴، ۲۹۵۷، ۲۹۶۰، ۲۹۶۳، ۲۹۶۶، ۲۹۶۹، ۲۹۷۲، ۲۹۷۵، ۲۹۷۸، ۲۹۸۱، ۲۹۸۴، ۲۹۸۷، ۲۹۹۰، ۲۹۹۳، ۲۹۹۶، ۳۰۰۰، ۳۰۰۳، ۳۰۰۶، ۳۰۰۹، ۳۰۱۲، ۳۰۱۵، ۳۰۱۸، ۳۰۲۱، ۳۰۲۴، ۳۰۲۷، ۳۰۳۰، ۳۰۳۳، ۳۰۳۶، ۳۰۳۹، ۳۰۴۲، ۳۰۴۵، ۳۰۴۸، ۳۰۵۱، ۳۰۵۴، ۳۰۵۷، ۳۰۶۰، ۳۰۶۳، ۳۰۶۶، ۳۰۶۹، ۳۰۷۲، ۳۰۷۵، ۳۰۷۸، ۳۰۸۱، ۳۰۸۴، ۳۰۸۷، ۳۰۹۰، ۳۰۹۳، ۳۰۹۶، ۳۰۹۹، ۳۱۰۲، ۳۱۰۵، ۳۱۰۸، ۳۱۱۱، ۳۱۱۴، ۳۱۱۷، ۳۱۲۰، ۳۱۲۳، ۳۱۲۶، ۳۱۲۹، ۳۱۳۲، ۳۱۳۵، ۳۱۳۸، ۳۱۴۱، ۳۱۴۴، ۳۱۴۷، ۳۱۵۰، ۳۱۵۳، ۳۱۵۶، ۳۱۵۹، ۳۱۶۲، ۳۱۶۵، ۳۱۶۸، ۳۱۷۱، ۳۱۷۴، ۳۱۷۷، ۳۱۸۰، ۳۱۸۳، ۳۱۸۶، ۳۱۸۹، ۳۱۹۲، ۳۱۹۵، ۳۱۹۸، ۳۲۰۱، ۳۲۰۴، ۳۲۰۷، ۳۲۱۰، ۳۲۱۳، ۳۲۱۶، ۳۲۱۹، ۳۲۲۲، ۳۲۲۵، ۳۲۲۸، ۳۲۳۱، ۳۲۳۴، ۳۲۳۷، ۳۲۴۰، ۳۲۴۳، ۳۲۴۶، ۳۲۴۹، ۳۲۵۲، ۳۲۵۵، ۳۲۵۸، ۳۲۶۱، ۳۲۶۴، ۳۲۶۷، ۳۲۷۰، ۳۲۷۳، ۳۲۷۶، ۳۲۷۹، ۳۲۸۲، ۳۲۸۵، ۳۲۸۸، ۳۲۹۱، ۳۲۹۴، ۳۲۹۷، ۳۳۰۰، ۳۳۰۳، ۳۳۰۶، ۳۳۰۹، ۳۳۱۲، ۳۳۱۵، ۳۳۱۸، ۳۳۲۱، ۳۳۲۴، ۳۳۲۷، ۳۳۳۰، ۳۳۳۳، ۳۳۳۶، ۳۳۳۹، ۳۳۴۲، ۳۳۴۵، ۳۳۴۸، ۳۳۵۱، ۳۳۵۴، ۳۳۵۷، ۳۳۶۰، ۳۳۶۳، ۳۳۶۶، ۳۳۶۹، ۳۳۷۲، ۳۳۷۵، ۳۳۷۸، ۳۳۸۱، ۳۳۸۴، ۳۳۸۷، ۳۳۹۰، ۳۳۹۳، ۳۳۹۶، ۳۳۹۹، ۳۴۰۲، ۳۴۰۵، ۳۴۰۸، ۳۴۱۱، ۳۴۱۴، ۳۴۱۷، ۳۴۲۰، ۳۴۲۳، ۳۴۲۶، ۳۴۲۹، ۳۴۳۲، ۳۴۳۵، ۳۴۳۸، ۳۴۴۱، ۳۴۴۴، ۳۴۴۷، ۳۴۵۰، ۳۴۵۳، ۳۴۵۶، ۳۴۵۹، ۳۴۶۲، ۳۴۶۵، ۳۴۶۸، ۳۴۷۱، ۳۴۷۴، ۳۴۷۷، ۳۴۸۰، ۳۴۸۳، ۳۴۸۶، ۳۴۸۹، ۳۴۹۲، ۳۴۹۵، ۳۴۹۸، ۳۵۰۱، ۳۵۰۴، ۳۵۰۷، ۳۵۱۰، ۳۵۱۳، ۳۵۱۶، ۳۵۱۹، ۳۵۲۲، ۳۵۲۵، ۳۵۲۸، ۳۵۳۱، ۳۵۳۴، ۳۵۳۷، ۳۵۴۰، ۳۵۴۳، ۳۵۴۶، ۳۵۴۹، ۳۵۵۲، ۳۵۵۵، ۳۵۵۸، ۳۵۶۱، ۳۵۶۴، ۳۵۶۷، ۳۵۷۰، ۳۵۷۳، ۳۵۷۶، ۳۵۷۹، ۳۵۸۲، ۳۵۸۵، ۳۵۸۸، ۳۵۹۱، ۳۵۹۴، ۳۵۹۷، ۳۶۰۰، ۳۶۰۳، ۳۶۰۶، ۳۶۰۹، ۳۶۱۲، ۳۶۱۵، ۳۶۱۸، ۳۶۲۱، ۳۶۲۴، ۳۶۲۷، ۳۶۳۰، ۳۶۳۳، ۳۶۳۶، ۳۶۳۹، ۳۶۴۲، ۳۶۴۵، ۳۶۴۸، ۳۶۵۱، ۳۶۵۴، ۳۶۵۷، ۳۶۶۰، ۳۶۶۳، ۳۶۶۶، ۳۶۶۹، ۳۶۷۲، ۳۶۷۵، ۳۶۷۸، ۳۶۸۱، ۳۶۸۴، ۳۶۸۷، ۳۶۹۰، ۳۶۹۳، ۳۶۹۶، ۳۶۹۹، ۳۷۰۲، ۳۷۰۵، ۳۷۰۸، ۳۷۱۱، ۳۷۱۴، ۳۷۱۷، ۳۷۲۰، ۳۷۲۳، ۳۷۲۶، ۳۷۲۹، ۳۷۳۲، ۳۷۳۵، ۳۷۳۸، ۳۷۴۱، ۳۷۴۴، ۳۷۴۷، ۳۷۵۰، ۳۷۵۳، ۳۷۵۶، ۳۷۵۹، ۳۷۶۲، ۳۷۶۵، ۳۷۶۸، ۳۷۷۱، ۳۷۷۴، ۳۷۷۷، ۳۷۸۰، ۳۷۸۳، ۳۷۸۶، ۳۷۸۹، ۳۷۹۲، ۳۷۹۵، ۳۷۹۸، ۳۸۰۱، ۳۸۰۴، ۳۸۰۷، ۳۸۱۰، ۳۸۱۳، ۳۸۱۶، ۳۸۱۹، ۳۸۲۲، ۳۸۲۵، ۳۸۲۸، ۳۸۳۱، ۳۸۳۴، ۳۸۳۷، ۳۸۴۰، ۳۸۴۳، ۳۸۴۶، ۳۸

۱۴۔ ۲۰ کو ایسے چار حصوں میں تقسیم کرو جو سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور پہلے اور چوتھے حصے کے حاصل ضرب کو دوسرے اور تیسرے کے حاصل ضرب سے نسبت ۳:۲ کی ہو

۱۵۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی پ ویں رقم ق ہے اور ق ویں رقم پ ہے اس کی م دیں رقم دریافت کرو۔

۱۶۔ کتنی رقمیں سلسلہ ۹ د ۱۲ د ۱۵ د کی لی جائیں گے حاصل جمع ۳۰۶ ہو

۱۷۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی ن ارقام کا مجموعہ ۲ ن + ۳ ن ہو تو اس کی م دیں رقم دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی م ارقام کے مجموعہ کو ن ارقام کے مجموعہ سے نسبت م:ن کی ہو تو ثابت کرو کہ م دیں رقم کو ن دیں رقم سے نسبت ۲ م - ۱:۲ ن - ۱ کی ہوگی۔

۱۹۔ اگر سلسلہ ۱ د ۳ د ۵ د ۷ د ۹ د وغیرہ کی ۲ ن + ۱ ارقام لی جائیں تو ثابت کرو کہ سلسلہ ارقام ۱ د ۵ د ۹ د وغیرہ کے مجموعہ کو باقی ارقام ۳ د ۷ د

۱۱ د وغیرہ کے مجموعہ سے وہی نسبت ہے جو ن + ۱ کو ن سے ہے۔
۲۰۔ اگر ن کی تمام قیمتوں کے لئے $ص = ن(۵ - ۳)$ تو پ دیں رقم دریافت کرو۔

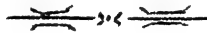
۲۱۔ کسی سلسلہ حسابیہ کی تعداد ارقام جفت ہے۔ طاق رقموں کا مجموعہ ۲۴ ہے اور جفت رقموں کا ۳۰ اور آخری رقم رقم اول سے بقدر $\frac{۱}{۱۰}$ کے زیادہ ہے۔ تعداد ارقام دریافت کرو۔

۲۲۔ دو مختلف نظام اعداد میں ہر ایک میں تین ارقام سلسلہ حسابیہ میں

ہیں۔ اور ہر ایک کا مجموعہ ۱۵ ہے پہلے نظام کا فرق مشترک دوسرے نظام کے فرق مشترک سے بقدر ایک کے زیادہ ہے اور پہلے نظام کے حاصل ضرب کو دوسرے نظام کے حاصل ضرب سے نسبت ۸ : ۷ کی ہے۔ اعداد دریافت کرو۔

۳۳۔ لا اور ۲ ما کا اردان اوسط حسابی ۲ لا اور ما کے اردیں اوسط حسابی کے برابر ہے جبکہ ہر ایک صورت میں ن اوسط حسابیہ مندرج کی جائیں لا اور ما کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۳۴۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی پ رقموں کا مجموعہ ق رقموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ $پ + ق$ ارقام کا مجموعہ صفر ہے



معلوم ہوگا کہ کسی رقم میں ب کا قوت نما تعداد ارقام سے جو اس رقم تک ہو بقدر ایک کے کم ہے۔

مثلاً تیسری رقم = اب^۲

چھٹی رقم = اب^۵

۲۰ ویں رقم = اب^{۱۹}

اور بالعموم ع ویں رقم = اب^{ع-۱}

اگر ن = تعداد ارقام اور خ = آخری رقم

تو خ = اب^{ن-۱}

مثال ۱۔ سلسلہ ۴، ۱۲، ۳۶ وغیرہ کی آٹھویں رقم دریافت کرو

نسبت مشترک = $\frac{۱۲}{۴} = ۳$ اسلئے ۸ ویں رقم = $۴ \times ۳^۷ = ۸۶۴۸$

مثال ۲۔ پانچویں اور ن-۱ ویں رقمیں سلسلہ $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ و کی دریافت کرو۔

جواب $\frac{۸}{۲۷} \pm \frac{۳-۲}{۳-۲}$ مثبت یا منفی بمطابق اس کے کہ

ن جنت ہے یا طاق۔

مثال ۳۔ سلسلہ ہندسیہ کی پہلی دو رقمیں ۱۲۵ اور ۲۵ ہیں۔ چھٹی اور ساتویں

رقمیں دریافت کرو۔ جواب $\frac{۱}{۲۵}$ و $\frac{۱}{۱۲۵}$

۵۹۔ تعریف ۱۔ جب تین مقادیر سلسلہ ہندسیہ میں ہوں

تو درمیانی مقدار کو دوسری دو کا اوسط ہندسی کہتے ہیں۔

تعریف ۲۔ جب مقادیر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و وغیرہ ایسی ہوں

کہ $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و ج ایک سلسلہ ہندسیہ ہو تو $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$

و $\frac{۱}{۴}$ کو اول اور ج کے ادا سطر ہندسیہ کہتے ہیں۔

۶۰۔ دو مقادیر کا اوسط ہندسی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $ا$ اور $ج$ دو مقادیر ہیں اور $ما$ ان کا اوسط ہندسی ہے اب چونکہ $ا$ و $ما$ و $ج$ سلسلہ ہندسیہ میں ہیں -

$$\text{اس لئے } \frac{ج}{ا} = \frac{ما}{ج} \text{ یا } ما^2 = ا ج$$

یعنی دو مقادیر کا اوسط ہندسی ان کے حاصل ضرب کے جذر کے برابر ہے -

۶۱ - دو مقادیر معلوم میں متعدد اواسط ہندسیہ مندرج کرد -
فرض کرو کہ $ا$ اور $ج$ دو مقادیر ہیں اور $ن$ اواسط ہندسیہ کی تعداد کو تعبیر کرتے - سلسلہ کی کل تعداد ارقام $ن + ۲$

پس ہمیں ایک ایسا سلسلہ ہندسیہ معلوم کرنا ہے جس کی پہلی رقم $ا$ ہو اور آخری رقم $ج$ - اگر نسبت مشترک کو $ب$ سے تعبیر کریں تو

$$ج = (ن + ۲) \text{ دہی رقم } = ا ب^{ن+۱}$$

$$ب^{ن+۱} = \frac{ج}{ا}$$

$$ب = \left(\frac{ج}{ا} \right)^{\frac{۱}{ن+۱}}$$

اواسط مطلوبہ ہوئیں $ا ب$ و $ا ب^۲$ و $ا ب^۳$ و و $ا ب^ن$ جہاں $ب$ کی قیمت (۱) سے حاصل ہوتی ہے -

مثال ۱ - تین اواسط ہندسیہ $\frac{۱}{۲}$ اور ۱۲۸ کے درمیان مندرج کرو فرض کرو کہ $ا$ و $ب$ و $ج$ و $د$ اواسط مطلوبہ ہیں

تب $\frac{۱}{۲}$ و $ا$ و $ب$ و $ج$ و $د$ و ۱۲۸ سلسلہ ہندسیہ میں ہیں

اگر سلسلہ مجوزہ کی نسبت مشترک $ب$ ہو تو $۱۲۸ = \frac{۱}{۲} ب^{۵}$ یا $ب^۵ = ۲۵۶$

اس لئے ب = ۲ = ۲۵۶ جس سے ب = ۴

اس لئے ۸ = ۲ × ۴ = ۱۶ اور ۱۶ = ۲ × ۸ = ۳۲ = ۲ × ۱۶ = ۶۴ = ۲ × ۳۲ = ۱۲۸ = ۲ × ۶۴ = ۲۵۶ = ۲ × ۱۲۸ = ۵۱۲ = ۲ × ۲۵۶ = ۱۰۲۴ = ۲ × ۵۱۲ = ۲۰۴۸ = ۲ × ۱۰۲۴ = ۴۰۹۶ = ۲ × ۲۰۴۸ = ۸۱۹۲ = ۲ × ۴۰۹۶ = ۱۶۳۸۴ = ۲ × ۸۱۹۲ = ۳۲۷۶۸ = ۲ × ۱۶۳۸۴ = ۶۵۵۳۶ = ۲ × ۳۲۷۶۸ = ۲۶۲۱۵۲ = ۲ × ۱۳۱۰۷۶ = ۵۲۴۳۰۴ = ۲ × ۲۶۲۱۵۲ = ۱۰۴۸۶۰۸ = ۲ × ۵۲۴۳۰۴ = ۴۱۹۲۸۶۴ = ۲ × ۲۰۹۶۴۳۲ = ۱۶۷۷۱۳۱۲ = ۲ × ۸۳۸۵۶۵۶ = ۶۷۰۸۵۲۴۸ = ۲ × ۳۳۵۴۲۶۲۴ = ۲۶۸۶۶۱۱۹۲ = ۲ × ۱۳۴۳۳۰۵۹۶ = ۱۰۷۴۶۴۴۷۹۲ = ۲ × ۵۳۷۳۲۲۳۹۶ = ۴۳۰۸۵۷۹۱۹۲ = ۲ × ۲۱۵۴۲۸۹۵۹۶ = ۱۷۲۳۴۲۳۵۹۲ = ۲ × ۸۶۱۷۱۱۷۹۶ = ۶۹۳۳۶۹۵۹۲ = ۲ × ۳۴۶۶۸۴۷۹۶ = ۲۷۷۰۹۵۹۱۹۲ = ۲ × ۱۳۸۵۴۷۹۵۹۶ = ۱۱۰۴۷۶۷۵۹۲ = ۲ × ۵۵۲۳۸۳۷۹۶ = ۴۴۱۹۰۷۵۹۲ = ۲ × ۲۲۰۹۵۳۷۹۶ = ۱۷۶۷۶۲۳۹۶ = ۲ × ۸۸۳۸۱۱۹۵۹۲ = ۷۰۷۰۴۹۹۱۹۲ = ۲ × ۳۵۳۵۲۴۵۹۶ = ۲۸۵۶۱۹۹۱۹۲ = ۲ × ۱۴۲۸۰۹۹۵۹۶ = ۱۱۴۲۴۷۹۵۹۲ = ۲ × ۵۷۱۲۳۹۷۹۶ = ۴۵۷۰۷۵۹۱۹۲ = ۲ × ۲۲۸۵۳۷۹۵۹۶ = ۱۸۱۶۲۹۹۱۹۲ = ۲ × ۹۰۸۱۱۴۹۵۹۶ = ۷۲۶۴۹۹۱۹۲ = ۲ × ۳۶۳۲۴۹۵۹۶ = ۲۹۳۱۹۹۱۹۲ = ۲ × ۱۴۶۵۹۹۵۹۶ = ۱۱۷۰۷۹۵۹۲ = ۲ × ۵۸۵۳۹۷۹۶ = ۴۷۰۳۹۷۹۶ = ۲ × ۲۳۵۱۹۸۹۶ = ۱۸۸۱۹۸۹۶ = ۲ × ۹۴۰۹۹۴۸ = ۷۵۲۷۹۴۸ = ۲ × ۳۷۶۳۹۷۴ = ۲۹۷۰۹۷۴ = ۲ × ۱۴۸۵۴۸۷ = ۱۱۸۰۴۸۷ = ۲ × ۵۹۰۲۴۳ = ۴۷۲۱۹۳ = ۲ × ۲۳۶۰۹۶ = ۱۸۸۸۹۶ = ۲ × ۹۴۴۴۸ = ۷۵۵۴۸ = ۲ × ۳۷۷۷۴ = ۲۹۷۷۴ = ۲ × ۱۴۸۸۷ = ۱۱۸۸۷ = ۲ × ۵۹۴۳ = ۴۷۵۴ = ۲ × ۲۳۷۷ = ۱۸۸۷ = ۲ × ۹۴۳ = ۷۵۵ = ۲ × ۳۷۷ = ۲۹۷ = ۲ × ۱۴۸ = ۱۱۸ = ۲ × ۵۹ = ۴۷ = ۲ × ۲۳ = ۱۸ = ۲ × ۹ = ۷ = ۲ × ۳ = ۲ = ۲ × ۱ = ۱

اگر ب نسبت مشترک ہو تو ۵ = چھٹی رقم = ۱۶۰ ب ۵ یا ب = ۱۶۰

اس لئے ب = ۱۶۰ پس

اداسط مطلوبہ ہوں گیں ۸۰ و ۴۰ و ۲۰ و ۱۰

مثال ۳ - چار اداسط ہندسیہ ۲ اور ۱ کے درمیان مندرج کرد -

جواب ۱ - ۳ اور ۲ - ۹ و ۳ - ۲۷

مثال ۴ - ۹ اداسط ہندسیہ ۱۳ اور ۳ کے درمیان مندرج کرد

جواب ۱ - ۲۷ اور ۲ - ۸۱ و ۳ - ۲۴۳ و ۴ - ۷۲۹ و ۵ - ۲۱۸۷ و ۶ - ۶۵۶۱ و ۷ - ۱۹۶۸۵ و ۸ - ۵۹۰۵۵ و ۹ - ۱۷۷۱۶۵

۵ - متعدد ارقام سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ان کا حاصل جمع دریافت کرد

فرض کرد ۱ = پہلی رقم، ب = نسبت مشترک، ن = تعداد ارقام

اور ص = حاصل جمع -

تب ص = ۱ + ب + ب + ب + + ب + ب - ۱ - ۱ (۱)

ہر ایک رقم کو ب سے ضرب دو -

ب ص = ب + ب + ب + + ب + ب - ۱ - ۱ (۲)

(۱) کو (۲) سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا -

ب ص - ص = ب - ۱ - ۱

ب ص (ب - ۱) = ب - ۱ - ۱

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{۱(ب-۱)}{ب-۱} = ص$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو - اسے ضرب دو تو حاصل ہوگا

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{۱(۱-ب)}{ب-۱} = ص$$

چونکہ اب ب = ۱ = خ جہاں خ رقم آخر ہے

$$۱ - ب = خ - ۱$$

نوٹ - بہتر ہوگا کہ طالب علم ص کی ہر دو صورتیں (۳) اور (۴) کو یاد رکھے اور (۴) کو ہمیشہ استعمال کرے سوائے اُس صورت کے جب ب مثبت ہو اور ایک سے بڑی ہو

مثال ۱ - سلسلہ ۲ - ۱ - ۳ - ۵ - ۷ - ۹ - کی ۷ رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

نسبت مشترک = - ۳ - ۱ سلسلے ضابطہ (۴) کی استقامت سے -

$$ص = \frac{\left\{ \frac{۲۱۸۶}{۱۲۸} + ۱ \right\} \frac{۲}{۳}}{\frac{۳}{۲} + ۱} = \frac{\left\{ \left(\frac{۳}{۲} - ۱ \right) - ۱ \right\} \frac{۲}{۳}}{\frac{۳}{۲} + ۱}$$

$$\frac{۲۹۳}{۹۶} = \frac{۲}{۵} \times \frac{۲۳۱۵}{۱۲۸} \times \frac{۲}{۳} =$$

مثال ۲ - سلسلہ ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - کا حاصل جمع ۵ رقموں تک دریافت کرو۔

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۹}{۴} = ۳ \div ۴ = \frac{۳}{۴}$$

۱ سلسلے اگر حاصل جمع ص ہو تو قانون جبرہ (۳) کی مدد سے

$$\frac{\left\{1 - \frac{233}{32}\right\}^3}{\frac{1}{2}} = \frac{\left\{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^5\right\}^3}{1 - \frac{3}{2}} = \text{ص}$$

$$39 \frac{9}{14} = \frac{433}{14} = 2 \times \frac{211}{32} \times 3 =$$

مثال ۳ - سلسلہ $(1-2), (2-1), (1+2), (2+1), \dots$ کان رتوں تک حاصل جمع دریافت کرو۔

$$\text{نسبت مشترک} = \frac{1}{2-1}$$

$$\text{ص} = \frac{\{1 - (\frac{1}{2-1})^n\} (2-1)}{\frac{1}{2-1} - 1}$$

$$= \frac{2-1}{1-2-1} \times \frac{\{1 - (\frac{1}{2-1})^n\} (2-1)}{2-1}$$

$$= \frac{\{1 - (\frac{1}{2-1})^n\}}{1-2-1} \times \frac{(2+1)}{2-1} =$$

۱۳ - کسی سلسلہ ہندسیہ کی غیر متناہی تعداد ارقام کے مجموعہ سے ہماری کیا مراد ہے؟

اگر نسبت مشترک ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم نہ ہو تو ظاہر ہے کہ جیسا ہم سلسلہ میں آگے آگے بڑھتے جائیں گے ارقام سلسلہ بھی عددی قیمت میں بڑھتی جائیں گی اس لئے اس صورت میں غیر متناہی تعداد ارقام کا مجموعہ غیر متناہی ہوگا۔

لیکن اگر ب کسر واجب ہو تو ارقام سلسلہ بتدریج گھٹتی جائیں گی

اور اس صورت میں ایک ایسی حد کا معلوم کرنا ممکن ہوگا جس سے سلسلہ کا مجموعہ ہرگز نہ بڑھ سکے خواہ تعداد ارقام کچھ ہی لی جائے اور آخر الامر جس حد کے لانتہا قریب یہ مجموعہ آجائے گا اگر ہم تعداد ارقام کافی طور پر زیادہ لیں۔

اس حد کو مجموعہ سلسلہ غیر متناہی کہتے ہیں

۶۴ - سلسلہ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ پر غور کرو

$$n \text{ ارقام کا مجموعہ} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ خواہ کتنی ارقام سلسلہ مندرجہ بالا کی لیں اس کا مجموعہ ہمیشہ ۲ سے کم رہے گا نیز ہم دیکھتے ہیں کہ n کو کافی بڑا لینے سے ہم کسر $\frac{1}{2^n}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں۔ پس رقموں کی تعداد کافی لینے سے مجموعہ سلسلہ مذکورہ اور ۲ میں فرق اتنا کم ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

اس نتیجہ کی توضیح بطریق ہندسی اس طرح ہو سکتی ہے۔

ا ب ب ب ب ب

فرض کرو کہ ا ب ایک محدود خط مستقیم ہے۔ ا ب کی تنصیف
ب پر کرو۔ اور ب ب کی فہ پر اور ب ب کی فہ پر اور
فہ ب کی فہ پر اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم اسی طرح سے اپنے اعمال تنصیف کو جاری رکھیں تو ب کے اتنا قریب پہنچ سکتے ہیں جتنا چاہیں۔ یعنی ہمارے آخری حصہ فرادوب میں فاصلہ اتنا کم ہو سکتا ہے جو کہ کسی معین مقدار سے جس کو ہم چٹائی کا معیار مان لیں کم ہو۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ $4b = 2$ انچ

تواتر = ۱

فان فم = $\frac{1}{2}$ =

$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ف ف ف = ف = ف اور علیٰ ہذا القیاس

تو حاصل جمع سلسله غیر متناهی $= 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots + \frac{1}{p^\infty}$ یک

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

جس سے ثابت ہوا کہ سلیے کا حاصل جمع طول ۱ ب یعنی ۲ سے

کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔ خواہ تعداد ارقام کچھ سی لی جائے۔

۶۵۔ کسی سلسلہ ہندیہ کی نسبت مشترک ایک سے کم ہے اس کی

غیر متناہی تعداد ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔

فرض کر دے کہ سلسلہ مجوزہ ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ہے اور

ص. حاصل جمع ن ارقام کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\frac{1}{b-a} - \frac{1}{b-a} = \frac{(1-1)}{b-a} = \frac{0}{b-a} = 0$$

چونکہ بکسر واجب ہے اسلئے جتنا بڑا ن ہوگا اتنا ہی چھوٹا بن

اور اسلئے جو $\frac{1}{1-b}$ ہوگا۔ اسلئے n کی قیمت کافی زیادہ لینے سے

ہم $\frac{1}{1-1}$ کو کسی معین مقدار سے جسے ہم اپنا چمٹائی کا معیار مقرر کریں چھوٹا بنا سکتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ہم جتنی زیادہ ارقام سلسلہ لیں گے مجموعہ ارقام اتنا ہی قریب قریب $\frac{1}{1-1}$ کے آتا جائے گا۔

اسلئے $\frac{1}{1-1}$ کو مجموعہ ارقام سلسلہ ہندسیہ غیر متناہی کہتے ہیں اور اسے اس طرح لکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{1-1} = \infty$$

ہم اس نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

سلسلہ ۱ د ا ب د ا ب د ا ب د ا ب د ا ب (جس میں ب بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے) کی ن ارقام کا مجموعہ $\frac{1}{1-1}$ سے کبھی نہیں بڑھ سکتا لیکن متواتر اس کے نزدیک آتا جاتا ہے اور اگر ن کو لا انتہا بڑا لیا جائے تو مجموعہ مذکورہ $\frac{1}{1-1}$ کے لا انتہا قریب آجائے گا۔

نوٹ۔ یاد رہے $\frac{1}{1-1}$ حقیقی حاصل جمع سلسلہ لا نہایت کا نہیں ہے بلکہ یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ ن کے بڑانے سے سلسلے کا حقیقی مجموعہ اس جو کے قریب قریب آتا جاتا ہے۔

۶۶۔ سلسلہ ہندسیہ کا اتساع اور استدقاق

سلسلہ ہندسیہ ص = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ پر غور کرو اگر ب = ۱ تو سلسلہ ہوگا۔

$$\text{ص} = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

پس ن کی قیمت کا فی طور پر بڑی لینے سے ہم سلسلہ مندرجہ بالا کے مجموعہ ارقام (ص) کو کسی بڑی سے بڑی مقدار سے زیادہ یا بڑا بنا سکتے ہیں۔

اگر ب لمحاظ عددی قیمت کے ایک سے بڑی ہو تو بھی یہی نتیجہ صحیح ہوگا کیونکہ اس صورت میں

$$\text{ص} = \frac{1(\text{ب} - 1)}{1 - \text{ب}}$$

$$= \frac{1}{1 - \text{ب}} - \frac{1}{1 - \text{ب}}$$

اب چونکہ ب < ۱ ہم ن کی قیمت کا فی زیادہ لینے سے (ب ن کو اور اسلئے) جملہ $\frac{1}{1 - \text{ب}}$ کو اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں اسلئے ن کو کافی بڑا لینے سے ہم مجموعہ ارقام (ص) کو کسی لانتہا بڑی مقدار معینہ سے بڑا بنا سکتے ہیں۔

ان دونوں صورتوں میں سلسلہ ہندسیہ متسلسل کہلاتا ہے اگر ب لمحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہو یعنی $\text{ب} < 1$ تو ہم ن کو کافی بڑا لینے سے (ب ن کو اور اسلئے) $\frac{1}{1 - \text{ب}}$ کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں اسلئے معلوم ہوا کہ ن کو کافی بڑا لینے سے ہم ص اور $\frac{1}{1 - \text{ب}}$ کے فرق کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا چاہیں بعض اوقات اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب ب لمحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہو تو مجموعہ سلسلہ غیر متناہی $1 + 1\text{ب} + 1\text{ب}^2 + \dots$ کی قیمت $\frac{1}{1 - \text{ب}}$ ہوتی ہے۔

اس صورت میں سلسلہ ہندسیہ مستحق کہلاتا ہے کیونکہ سلسلہ

کا مجموعہ قیمت $\frac{1}{1-ب}$ کے قریب قریب آتا جاتا ہے۔
 مثال ۱۔ سلسلہ غیر متناہی $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس جگہ $1 = \frac{3}{2}$ و $ب = \frac{2}{3}$ $\therefore \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$
 اسلئے مجموعہ مطلوبہ $= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
 $\frac{24}{24} = \frac{9}{12} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$

مثال ۲۔ سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا حاصل جمع ۱۹ ہے اور حاصل ضرب ۲۱۶ انہیں دریافت کرو۔

اعداد کو $\frac{1}{ب}$ د اور $1-ب$ سے تعبیر کرو
 $\frac{1}{ب} \times 1 \times 1 = 216$ یعنی $1 = 216$ یا $1 = 6$ پس
 اعداد ہوئے $\frac{1}{ب}$ و 6 و 6

$\therefore \frac{1}{ب} + 6 + 6 = 19$
 $\therefore 13 - 6 = 7$ یعنی $ب = \frac{7}{13}$ یا $\frac{13}{7}$

اسلئے اعداد مطلوبہ ۱۳ و ۶ و ۹ ہیں

مثال ۳۔ ایک غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کا حاصل جمع ۱۵ ہے اور اس کی رقوم کے مربوں کا حاصل جمع ۴۵ ہے۔ سلسلہ دریافت کرو
 فرض کرو کہ $1 =$ پہلی رقم $ب =$ نسبت مشترک

سلسلہ کا حاصل جمع $= \frac{1}{1-ب} = 15$ (۱)
 رقوم کے مربوں کا حاصل جمع $= \frac{1}{1-ب^2} = 45$ (۲)
 (۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے $3 = \frac{1}{1+ب}$ (۳)
 (۱) اور (۳) سے $5 = \frac{1}{1-ب}$

....., μ^2 , μ^1 , μ^0 - 16

۱۸-۳ و ۴ و ۵ و ۶ -

..... 94, 95, 96 - 19

$$\dots + \frac{1}{r} + \frac{1}{r\sqrt{r}-r} + \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - 2.$$

$$\dots + (1 - \sqrt{b}) + 1 + (1 + \sqrt{b}) = 21$$

$$- \frac{1}{7}(\frac{x}{x}) + \frac{1}{7}(\frac{x}{x}) - \frac{1}{7}(\frac{1}{x}) = 22$$

عددی قیمت کے واسطے کم ہے۔

۲۲۷ - سلسلہ ہندسیہ میں پہلی ۴ رتوں کا مجموعہ پہلی تین رتوں کے مجموعہ کا ۹ گنا ہے۔ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۴۔ سلسلہ ہندسہ کی پانچویں رقم ۸۱ ہے اور دوسری رقم ۲۴ سلسلہ دریافت کرو۔

۲۵۔ کسی سلسلہ ہندسیہ کی نسبت مشترک ۳ ہے مجموعہ ۷۲۸ اور آخری رقم ۳۸۶ رقم اول دریافت کرو

۴- سلسلہ ہندسیہ کئی پہلی رقم ہے آخری رقم ۴۴۸ اور مجموعہ ارتقا ۱۸۹ نسبت مشترک معلوم کرو۔

۲۷۔ سلسلہ ہندسیہ میں تین عددوں کا مجموعہ ۳۸ ہے اور ان کا حاصل ضرب ۱۷۲۸ ہے انہیں دریافت کرو۔

۲۸۔ سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا متواتر حاصل ضرب ۲۱۶ ہے اور ان میں سے دو دو اعداد کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۱۵۶ ہے

انہیں دریافت کرو۔

۲۹۔ اگر $س ع = ۱ + ب ع + ب ۲ ع + \dots + \infty$ تک

اور $ص ع = ۱ - ب ع + ب ۲ ع - \dots + \infty$ تک

تو ثابت کرو کہ $س ع + ص ع = ۲$ س ۲ ع

۳۰۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی ف دیں، ق دیں، ر دیں اور تمام

بالترتیب ل و م و ن ہوں تو ثابت کرو کہ ل - ق - ر - م - ن - ف - ق = ۱

۳۱۔ کسی غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کا مجموعہ ۴ ہے اور ارقام کے کعبوں کا

مجموعہ ۱۹۲ ہے سلسلہ دریافت کرو۔

۳۷۔ متوالی کسور اعشاریہ غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کی ایک عمدہ

مثال ہے۔

مثال ۱۔ $س ۲۳ ع$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$س ۲۳ ع = ۱ + \frac{۲۳}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰} + \dots$$

$$= ۱ + \frac{۲۳}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰} + \dots$$

$$= ۱ + \frac{۲۳}{۱۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰} + \frac{۲۳}{۱۰۰۰} + \dots$$

$$= \left\{ \dots + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} + ۱ \right\} \frac{۲۳}{۳۱۰} + \frac{۲}{۱۰} =$$

$$= \frac{۱}{\frac{۱}{۱۰} - ۱} \times \frac{۲۳}{۳۱۰} + \frac{۲}{۱۰} =$$

$$= \frac{۱۰۰}{۹۹} \times \frac{۲۳}{۳۱۰} + \frac{۲}{۱۰} =$$

$$= \frac{۴۱۹}{۹۹۰} = \frac{۲۳}{۹۹۰} + \frac{۲}{۱۰} =$$

۳۸۔ کسور اعشاریہ متوالی یا عدد کی قیمت دریافت کر نیکا قاعدہ

اس طرح ثابت ہو سکتا ہے۔

اگر ت سے غیر متوالی ہندسوں کو تعبیر کریں جن کی تعداد ط ہے اور اگر ت سے دور مکرر کو تعبیر کریں جس میں ع ہند سے شامل ہیں اور ت = قیمت کسور اعشاریہ متوالی تو

ت = ق ق ق ق و

اسلئے . ط ت = ق ق ق و ف

اور . ط + ط ت = ق ق ق و ق ف

تفریق سے (ط + ط ت - ط) ت = ق ف - ف

اسلئے ت = $\frac{ق ف - ف}{ط (۱ - ط)}$ (۱)

اب (۱ - ط) ایک ایسا عدد ہے جس میں ع دفعہ ۹ شامل ہے اسلئے معلوم ہوا کہ (۱) کا نسب نما ایک ایسا عدد ہے جس میں ہندسہ ۹ صریحاً ع دفعہ تکرار پاتا ہے اور اس کے اول یعنی دائیں طرف ط صفر ہیں۔ کسور اعشاریہ دور کو کسور عام میں لانے کا قاعدہ حسب ذیل ہے۔

شمار کنندہ بنانے کے لئے ایسے عدد صحیح سے جو متوالی اور غیر متوالی ہندسوں سے ملکر بنا ہو وہ عدد تفریق کر د جس میں صرف غیر متوالی ہند سے شامل ہوں اور نسب نما بنانے کے لئے ایسا عدد لو جس میں ہندسہ ۹ اتنی دفعہ تکرار پائے جتنے متوالی ہند سے دور کرے میں ہوں اور اس کے اول یعنی دائیں طرف اتنے صفر لکھو جتنے غیر متوالی ہند سے ہوں۔

۶۹۔ خاص قسم کے سلسلوں کا جمع کرنا

سلسلہ ۱د (۱+ن) ب د (۱+۲ن) ب ۲د (۱+۳ن) ب ۳د
کی ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔

اس سلسلہ میں ہر ایک رقم سلسلہ حسابیہ ۱د ۱+ن ۲د ۱+۲ن ۳د ۱+۳ن
اور سلسلہ ہندسیہ ۱د ب ۲د ب ۳د کی مطابق رقموں کا
حاصل ضرب ہے۔

فرض کرو کہ ص سے حاصل جمع ن ارقام تبیر ہوتا ہے تب

$$\text{ص} = ۱ + (۱+ن) ب + (۱+۲ن) ب^۲ + \dots + (۱+(ن-۱)ب)^{ن-۱} + (۱+ن) ب^ن$$

$$\text{ب ص} = ۱ ب + (۱+ن) ب^۲ + \dots + (۱+(ن-۱)ب)^{ن-۱} ب + (۱+ن) ب^ن$$

$$+ (۱+(ن-۱)ب)^{ن-۱} ب + (۱+ن) ب^ن$$

عمل تفریق سے

$$\text{ص} (۱-ب) = ۱ + (ن) ب + (ن) ب^۲ + \dots + (ن) ب^{ن-۱} + (ن) ب^n$$

$$- (۱+(ن-۱)ب)^{ن-۱} ب - (۱+ن) ب^n$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{۱}{۱-ب} + \frac{(ن) ب}{(۱-ب)^۲} - \frac{(۱+(ن-۱)ب)^{ن-۱} ب + (۱+ن) ب^n}{۱-ب}$$

اگر ب > ۱ تو ن کو کافی بڑا لینے سے ہم ب کو اتنا چھوٹا بنا سکتے

ہیں جتنا چاہیں۔ اب فرض کرو کہ اس طرح سے تمام رقمیں جن میں

$$\text{ب} \text{ شامل ہے ساقط کر دی جائیں تو حاصل جمع ص} = \frac{۱}{۱-ب} + \frac{(ن) ب}{(۱-ب)^۲}$$

جہاں ص سے ہم سلسلہ غیر متناہی کے مجموعہ کو تعبیر کرتے ہیں

نوٹ - اس قسم کے سلسلوں کو جمع کرنے میں طالب علم کو منابطہ مندرجہ بالا کے استعمال کرنے کی ضرورت نہیں اُسے چاہیئے کہ ہر ایک صورت میں نتیجہ مطلوب کو بلا واسطہ مفصل عمل سے حاصل کرے ابتدا ذیل سے طریقہ عمل کی توضیح ہوگی۔

مثال ۱ - سلسلہ $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{7}{64} + \dots$ کی ن دین رقم اور ن ارقام کا مجموعہ دریافت کرو۔
سلسلہ مجوزہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$1 + \frac{3}{4} \times 1 + \frac{5}{16} \times 2 + \frac{7}{64} \times 3 + \dots$$

اس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ کی ہر ایک رقم سلسلہ حسابیہ ۱ و ۳ و ۵ وغیرہ اور سلسلہ ہندسیہ ۱ و $\frac{1}{4}$ و $(\frac{1}{4})^2$ و $(\frac{1}{4})^3$ وغیرہ کی مطابق رتوں کا حاصل ضرب ہے۔ اس لئے سلسلہ معلومہ کی ن دین رقم

$$= \{1 + (n-1) \times \frac{1}{4}\} \times \{1 - (\frac{1}{4})^n\} = \frac{1 - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$$

اگر حاصل جمع ن ارقام ص سے تعبیر کیا جائے گا $\frac{1}{4}$ کی جگہ لا رکھنے سے

$$ص = 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{7}{64} + \dots + (2-n) + (1-n)$$

$$ص لا = 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \dots + (2-n) + (3-n) + (1-n)$$

$$+ (2-n) + (1-n)$$

اسلئے تفریق سے

$$\text{ص } (1-n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{لان}$$

$$1 + \{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}\} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \quad \text{لان}$$

$$\frac{1}{2^n} \text{ ص } = \frac{1}{2^n} \times 2^n = 1 \quad \text{لان}$$

$$1 + \{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}\} = 2^n - 1$$

$$1 + \{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}\} = 2^n - 1$$

$$\text{اس لئے ص } = 2^n - 1 = 2^n - 1$$

مثال ۳۔ اگر $a > 1$ تو سلسلہ غیر متناہی

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots \text{ کو جمع کرو}$$

$$\text{فرض کرو کہ ص } = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

$$\text{لاص } = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

$$\therefore \text{ ص } (1-a) = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

$$\therefore \text{ ص } = \frac{1}{1-a}$$

مثال ۳۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ کو جمع کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ ص } = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ ص } = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\therefore \frac{2}{5} \text{ ص} = \left(\frac{3}{1-5} + \dots + \frac{3}{2} + \frac{3}{5} \right) + 1 = \frac{2-3}{5} - \left(\frac{1}{2-5} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 1 \right) \frac{3}{5} + 1 =$$

$$\frac{2-3}{5} - \left(\frac{1}{2-5} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 1 \right) \frac{3}{5} + 1 =$$

$$\frac{2-3}{5} - \frac{\frac{1}{2-5} - 1}{\frac{1}{5} - 1} \times \frac{3}{5} + 1 =$$

$$\frac{2-3}{5} - \left(\frac{1}{1-5} - 1 \right) \frac{3}{5} + 1 =$$

$$\frac{4+12}{5 \times 3} - \frac{4}{3} =$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{4+12}{1-5 \times 14} - \frac{35}{14}$$

مثال ۵۔ سلسلہ ۱ + $\frac{2}{5}$ + $\frac{3}{2}$ + $\frac{4}{3}$ + غیرہ کو ن رقموں تک جمع کرو۔

$$\text{جواب} \quad \frac{5+1-5-12}{1-5 \times 14}$$

مثال ۶۔ سلسلہ ۱ + $\frac{2}{5}$ + $\frac{3}{2}$ + $\frac{4}{3}$ + $\frac{5}{4}$ + $\frac{6}{3}$ + $\frac{7}{2}$ + $\frac{8}{1}$ کو جمع کرو۔
جواب $\frac{7+1-2-14}{3(1-5)}$

۷۔ سلسلہ ہندسیہ کی متفرق مثالیں

مثال ۱۔ اگر ص سے حاصل جمع ن ارقام کسی سلسلہ ہندسیہ کا تعبیر ہو تو مجموعہ ص + ص + ص + ... + ص کی قیمت دریافت فرض کرو کہ ۱ = رقم اول اور ب = نسبت مشترک

$$\text{ص} = \frac{1(ب-1)}{ب-1}$$

$$۱ \text{ سلسلے ص } = \frac{۱(۱-ب)}{۱-ب} \text{ ص } = \frac{۱(۱-ب^۲)}{۱-ب} \text{ ص } = \frac{۱(۱-ب^۳)}{۱-ب} \text{ ص } \text{ اور علیٰ یہ القیاس}$$

$$۱ \text{ سلسلے ص } + \text{ ص } + \text{ ص } + \text{ ص } + \dots + \text{ ص } + \text{ ص}$$

$$= \frac{۱}{۱-ب} \{ (۱-ب) + (۱-ب^۲) + (۱-ب^۳) + \dots + (۱-ب^۳) \}$$

$$= \frac{۱}{۱-ب} \{ (۱-ب) + (۱-ب^۲) + (۱-ب^۳) + \dots + (۱-ب^۳) - (۱-ب^۳) \}$$

$$= \frac{۱}{۱-ب} \left\{ ۱ - \frac{ب(۱-ب^۳)}{۱-ب} - (۱-ب^۳) \right\}$$

$$= \frac{۱}{۱-ب} \left\{ ۱ - \frac{ب(۱-ب^۳)}{۱-ب} - (۱-ب^۳) \right\}$$

مثال ۲ - سلسلہ ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + کی ن رتوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ص مجموعہ مطلوبہ ہے

$$۱ \text{ سلسلے ص } = ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + \dots + \text{ ن رتوں تک}$$

$$= ۵ \{ ۱ + ۱۱ + ۱۱۱ + \dots + \text{ ن رتوں تک} \}$$

$$= \frac{۵}{۹} \{ ۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \dots + \text{ ن رتوں تک} \}$$

$$= \frac{۵}{۹} \{ (۱-۱۰) + (۱-۱۰۰) + (۱-۱۰۰۰) + \dots + \text{ ن رتوں تک} \}$$

$$= \frac{۵}{۹} \{ (۱-۱۰) + (۱-۱۰۰) + (۱-۱۰۰۰) + \dots + \text{ ن رتوں تک} \}$$

$$= \frac{۵}{۹} \left\{ ۱ - \frac{(۱-۱۰)^۳}{۱-۱۰} - (۱-۱۰)^۳ \right\} = \frac{۵}{۹} \left\{ ۱ - \frac{(۱-۱۰)^۳}{۱-۱۰} - (۱-۱۰)^۳ \right\}$$

مثال ۳ - سلسلہ ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + کو ن رتوں تک جمع کرو۔
فرض کرو کہ ق سے سلسلہ مجوزہ کی ن دیں رقم تعبیر ہوتی ہے

اور ص = حاصل جمع مطلوب

$$\text{ص} = ۱ + ۵ + ۱۳ + ۲۹ + \dots + \text{قن}$$

$$\text{نیز ص} = ۰ + ۱ + ۵ + ۱۳ + \dots + \text{قن} + ۱ + \text{قن}$$

$$\text{تفریق سے } ۰ = (۱ + ۴ + ۸ + ۱۶ + \dots + \text{ن رقموں تک}) - \text{قن}$$

$$\text{اسلئے قن} = ۱ + \{۱ + ۴ + ۸ + ۱۶ + \dots + \text{ن} - ۱ \text{ رقموں تک}\}$$

$$۳ - ۲ = (۱ - ۲) \times ۲ + ۱ = \frac{(۱ - ۲) ۲}{۱ - ۲} + ۱ =$$

اسلئے پہلی رقم = $۳ - ۲$ ، دوسری رقم = $۳ - ۲$ ، تیسری رقم = $۳ - ۲$ ،
اور علیٰ ہذا القیاس

$$\text{اسلئے ص} = (۳ - ۲) + (۳ - ۲) + (۳ - ۲) + \dots + (۳ - ۲)$$

$$= (۲ + ۲ + ۲ + \dots + \text{ن رقموں تک}) - ۳$$

$$= ۳ - \frac{(۱ - ۲) ۲}{۱ - ۲} = ۳ - (۱ - ۲) = ۳$$

مثال ۳۔ سلسلہ $۲ + ۲ + \frac{۱۲}{۳} + \frac{۴۴}{۹} + \dots$ کو ن رقموں تک
جمع کرو۔

فرض کرو کہ قن = ن دیں رقم، ص = ن رقموں کا حاصل جمع۔

$$\text{ص} = ۲ + ۲ + \frac{۱۲}{۳} + \frac{۴۴}{۹} + \dots + \text{قن}$$

$$\text{نیز ص} = ۰ + ۲ + ۲ + \frac{۱۲}{۳} + \frac{۴۴}{۹} + \dots + \text{قن} + ۱ + \text{قن}$$

$$\text{اسلئے تفریق سے } ۰ = (۲ + ۲ + \frac{۱۲}{۳} + \frac{۴۴}{۹} + \dots + \text{ن ارقام تک}) - \text{قن}$$

$$\text{اسلئے قن} = ۲ + ۲ + \{۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \dots + \text{ن} - ۱ \text{ ارقام تک}\}$$

$$2 + 2 = \frac{\left\{ 5n \left(\frac{1}{3} \right) - 1 \right\}}{\frac{1}{3} - 1} = 5 - \frac{1}{3n-2}$$

۱۔ سلسلے پہلی رقم = $5 - \frac{1}{3}$ ، دوسری رقم = $5 - \frac{1}{3^2}$ ۔

تیسری رقم = $5 - \frac{1}{3^3}$ ، چوتھی رقم = $5 - \frac{1}{3^4}$ اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے ص = $5n - \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n} \right\}$ رقم تک

$$5n - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} - \dots - \frac{1}{3^n} = \frac{\left\{ 5n \left(\frac{1}{3} \right) - 1 \right\}}{\frac{1}{3} - 1} \times 3 - 5n = \frac{\left\{ 5n \left(\frac{1}{3} \right) - 1 \right\}}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$5n - \frac{4}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

مثال ۵۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ کی پ دیں، ق دیں، ر دیں اور ارقام بالترتیب عہ دبہ دصہ ہوں تو عہ دبہ دصہ کا باہمی ربط دریافت کرو۔

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فرض کر دو کہ ۱ = رقم اول، ب = نسبت مشترک} \\ \text{عہ = ۱ ب پ} \\ \text{بہ = ۱ ب ق} \\ \text{صہ = ۱ ب ر} \end{array} \right.$$

اب ہمیں ۱ اور ب کو ان معادلات سے ساقط کرنا ہے

(۱) کو (۲) پر اور (۲) کو (۳) پر تقسیم کرو۔

$$\text{پس } \frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} = \text{ب پ - ق} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{بہ}}{\text{صہ}} = \text{ب ق - ر}$$

اسلئے $\left(\frac{\text{عہ}}{\text{بہ}} \right) \text{ - ز} = \{ \text{ب پ - ق} \} \text{ (ق - ر) اور اسلئے } \left(\frac{\text{بہ}}{\text{صہ}} \right) \text{ - پ - ق}$

$$:۔ ع-ق-ر \times ص-پ-ق = ب-پ-ق \times ب-ق-ر = ب-پ-ر$$

$$اسلئے ع-ق-ر \times ب-پ-ق = ب-پ-ر \times ص-پ-ق = ۱$$

مثال ۶۔ اگر ا د ب ر ج د د سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$${}^2(د-۱) = {}^2(ب-ج) + {}^2(ج-۱) + {}^2(د-ب)$$

$$\text{نسبت مشترک} = \frac{ب}{۱} = \frac{ج}{ب} = \frac{د}{ج}$$

$$اسلئے ب = ۱ \text{ ج } = ۲ \text{ د } = ۴ \text{ ب د ب ج } = ۱ د ۲ ۴ \dots (۱)$$

$$اسلئے (ب-ج) + (ج-۱) + (د-ب) =$$

$$= (ب-۲) + (۲-۱) + (۴-۲) = (د-۲) + (۲-۱) + (۴-۲) =$$

$$= ۲(ب-۱) + (ج-۱) + (د-۲) = ۲(۱-۱) + (۲-۱) + (۴-۲) =$$

$$= ۰ + ۱ + ۲ = ۳ \text{ ب د ب ج } = ۱ د ۲ ۴ \dots (۱)$$

$$= {}^2(د-۱)$$

مثال ۷۔ اگر ن ا واسطہ ہندسیہ دو مقادیر ا اور ج کے درمیان

مندرجہ کی جاییں تو ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ضرب = (ا ج) ^ن

فرض کرو کہ ا ب و ا ب ا و ا ب ن واسطہ ہندسیہ

$$\text{ہیں تب ج } = ا ب ن + ۱$$

$$اسلئے حاصل ضرب واسطہ = (ا ب) (ا ب) (ا ب) \dots (ا ب) =$$

$$= ا ب \times ب \times ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن = ا ب \times \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

$$= ا ب \times (ا ب ن + ۱) = ا ب \times ج = (ا ج) \frac{ن}{۲}$$

مثال ۸۔ سلسلہ غیر متناہی ا ب + (ا + ا د) + (ا + ا د + ا د) + (ا + ا د + ا د + ا د) + ...

کی (۲ ن ۱) دین رقم کے جس کی پہلی رقم ۱ ہو اور با پنجویں رقم ج۔
 ۸۔ ایک سلسلہ ہندسیہ کی پہلی رقم ۱ ہے اور نسبت مشترک ہر
 اگر اس کی ۲ ن ارقام کا مجموعہ ایک ایسے سلسلہ کی ن ارقام کے
 مجموعہ کے برابر ہو جس کی پہلی رقم ج ہو اور نسبت مشترک ب ۲
 تو ثابت کرو کہ ج سلسلہ اول کی پہلی دو ارقام کے مجموعہ کے برابر ہے
 ۹۔ سلسلہ غیر متناہی ۱ + (۱ + ۲) ب + (۱ + ۲ + ۳) ب ۲
 + (۱ + ۲ + ۳ + ۴) ب ۳ + کا مجموعہ دریافت کرو
 اس میں ۵ اور ب کسور واجب ہیں۔

۱۰۔ سلسلہ ہندسیہ میں تین اعداد کا مجموعہ ۷۰ ہے اگر طرفین میں
 سے ہر ایک کو ۳ سے اور اوسط کو ۵ سے ضرب دیدی جائے تو یہ حاصل
 ضرب سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں اعداد دریافت کرو۔

۱۱۔ کسی غیر متناہی سلسلہ ہندسیہ کی پہلی دو ارقام کا مجموعہ ۵ ہے
 اور ہر ایک رقم چنانچہ مابعد کی تمام رقموں کے مجموعہ کی ۳ گنی ہے
 سلسلہ دریافت کرو۔

۱۲۔ تین اعداد سلسلہ ہندسیہ میں ہیں ان میں سے ایسے تین اعداد
 منفی کر دئے گئے ہیں جو خود سلسلہ ہندسیہ میں ہیں اور دیکھا گیا
 ہے کہ باقی ماندہ تین اعداد بھی سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔ ثابت کرو
 کہ ان تینوں سلسلوں کی نسبت مشترک ایک ہی ہے۔

۱۳۔ اگر کسی سلسلہ ہندسیہ میں م = مجموعہ ن ارقام د ض =
 حاصل ضرب ن ارقام اور ق = سلسلہ کی ن ارقام کے مقبولوں کا
 مجموعہ تو ثابت کرو کہ

۲۹۔ کسی سلسلہ کی ہر ایک جفت رقم اپنی رقم ماقبل کی ۱ گنی ہے اور ہر ایک طاق رقم اپنی رقم ماقبل کی ۳ گنی ہے۔ رقم اول ایک ہے ۲ ن ارقام تک اس سلسلہ کا حاصل جمع دریافت کرو۔
۳۰۔ اگر کسی سلسلہ ہندیہ کی پہلی رقم = ۱، نسبت مشترک = ب اور حاصل جمع ن ارقام = ص_۱ تو ص_۲، ص_۳، ص_۴، ... ص_{۲۰} کا مجموعہ دریافت کرو۔

۳۱۔ اگر ص_۱، ص_۲، ص_۳، ... ص_{۲۰} سے غیر متناسی ہندیہ سلسلوں کے مجموعے بتیہ کئے جائیں اور اگر ان سلسلوں کی پہلی رقمیں ۱، ۲، ۳، ... پ ہوں اور ان کی مشترک نسبتیں بالترتیب $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{q}$ ، $\frac{1}{r}$ ، ... پ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ص_1 + ص_2 + ص_3 + \dots + ص_p = \frac{پ}{پ+۳}$$

۳۲۔ اگر ب مثبت ہو اور ایک سے کم ہو اور م مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ $(۱+م)ب(۱-ب) > ۱-ب^{۲۰}$ اس سے ثابت کرو کہ جب ن لانتہا بڑا ہو تو ن ب لانتہا چھوٹا ہوگا۔

باب ششم

سلسلہ موسیقی

۷۱۔ تعریف۔ تین مقادیر ا د ب و ج سلسلہ موسیقی

میں کہلاتی ہیں اگر اُن کا باہمی ربط $\frac{1}{ج} = \frac{1}{ب} - \frac{1}{ج} = \frac{1}{ب}$ ہو یعنی پہلی مقدار کو تیسری مقدار سے وہی نسبت ہو جو پہلی اور دوسری کے حاصل تفریق کو دوسری اور تیسری کے حاصل تفریق سے ہے

ایک سلسلہ مقادیر سلسلہ موسیقی کہلاتا ہے جب اُس کی کوئی سی تین متصل ارقام میں مذکورہ بالا ربط موجود ہو۔

۷۲۔ اگر مقادیر سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ان کے متکافی یا متقابل سلسلہ حسابیہ میں ہونگے۔

بوجب تعریف اگر ا د ب و ج سلسلہ موسیقی میں ہوں تو

$$\boxed{\frac{1-ب}{ب-ج}} = \frac{1}{ج}$$

$$1-ب = ج = ج-ب$$

ہر ایک رقم کو ا ب ج پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{1}{ج} - \frac{1}{ب} = \frac{1}{ب} - \frac{1}{ا} \text{ جس سے مسئلہ ثابت ہوا۔}$$

ظاہر ہے کہ او $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{32}$
 اور $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{32}$
 موسیقی سلسلے میں کیونکہ انکی رقموں کے متکافی او ۲ و ۳ و ۴ و ۵
 اور ۲-۳-۴-۵-۸-۱۳-۱۸ حسابیہ سلسلے ہیں۔
 چونکہ سلسلہ موسیقی سلسلہ حسابیہ کی ارقام کو الٹانے سے حاصل ہوتا ہے
 اسلئے سلسلہ موسیقی کی صورت عامہ یہ ہے -

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ ، ، $\frac{1}{4} + \frac{1}{32}$ (ن-۱) ف
 کیونکہ اس میں صرف دو بے تعلق مستقل مقادیر شامل ہیں اور انکے
 متکافی سلسلہ حسابیہ میں ہیں -

ہم جانتے ہیں کہ اگر سلسلہ حسابیہ کی رقم اول اور فرق مشترک (یعنی
 صرف دو مقادیر) معلوم ہوں تو تمام سلسلہ دریافت ہو سکتا ہے اس
 کو مد نظر رکھ کر ہم حسابی سلسلوں کو جن میں بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶،
 ارقام شامل ہوں بنائیت مختصر اور عام صورت میں رکھ سکتے ہیں۔ مثلاً

۱-ب، ۱، ۱+ب

۱-۳ب، ۱-ب، ۱+ب، ۱+۳ب

۱-۲ب، ۱-ب، ۱، ۱+ب، ۱+۲ب

وغیرہ

جہاں ۱ اور ب کوئی دو مقادیر ہیں۔ اسی طرح سے جن موسیقی
 سلسلوں میں بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶ رقوم شامل ہوں اُن کی بنائیت مختصر
 اور عام صورتیں حسب ذیل ہوں گی -

فرض کرو کہ ا اور ب متادیر معلومہ ہیں اور ی ان کا اوسط موسیقی ہے تب $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں

$$\text{اسلئے } \frac{1}{y} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{a} = \frac{2}{b}$$

$$\text{اسلئے } y = \frac{2ab}{b+a}$$

مثال ۱۔ ۵ اور $\frac{5}{4}$ کے درمیان ۲۰ ادا سطر موسیقی مندرج کرو فرض کرو کہ ادا سطر مطلوبہ ی و ی و ی و ی ی ہیں۔

تب $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{4}{5}$ سلسلہ حسابیہ میں ہیں

اگر ہم سلسلہ مندرجہ بالا کا فرق مشترک بہ سے تعبیر کریں تو

$$\frac{4}{5} = 22 \text{ دیں رقم } = \frac{1}{5} + 21 \text{ بہ جس سے بہ} = \frac{1}{11} \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{11}$$

$$\text{اسلئے } \frac{24}{105} = \frac{1}{21} + \frac{1}{5} = \frac{1}{y_1}$$

$$\frac{31}{105} = \frac{2}{21} + \frac{1}{5} = \frac{1}{y_2}$$

$$\frac{34}{105} = \frac{3}{21} + \frac{1}{5} = \frac{1}{y_3}$$

$$\frac{121}{105} = \frac{1}{21} - \frac{4}{5} = \frac{1}{y_4}$$

اسلئے ادا سطر مطلوبہ $\frac{105}{24}$ و $\frac{105}{31}$ و $\frac{105}{34}$ و و $\frac{105}{121}$ ہیں

مثال ۲- ۱ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ۱۸ اواسط موسیقیہ مندرج کرو۔
 فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ دیم و $\frac{1}{4}$ دیم ی اواسط مطلوبہ ہیں۔
 تب ۱ دیم $\frac{1}{2}$ دیم $\frac{1}{4}$ دیم $\frac{1}{16}$ دیم ۲۰ سلسلہ حسابیہ میں ہیں
 اگر یہ = فرق مشترک تو $20 = 2$ دین رقم $19 + 1$ بہ جس سے
 بہ = ۱

اسلئے $\frac{1}{2}$ = ۱ + بہ = ۲ دیم $\frac{1}{2}$ = ۲ + ۱ = ۳ بہ
 $\frac{1}{4}$ = ۳ + ۱ = ۴ بہ $\frac{1}{8}$ = ۴ + ۱ = ۵ بہ
 $\frac{1}{16}$ = ۲۰ - ۱۹ = بہ

پس اواسط مطلوبہ $\frac{1}{2}$ دیم $\frac{1}{4}$ دیم $\frac{1}{16}$ دیم ہیں
 مثال ۳- ۱ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان ۴۰ اواسط موسیقیہ مندرج کرو
 چونکہ ۶ ایک ایسے سلسلہ حسابیہ کی ۴۲ دیں رقم ہے جس کی رقم اول
 $\frac{1}{4}$ ہے اسلئے

$6 = \frac{1}{4} + 4$ ف جہاں ف فرق مشترک ہے یعنی ف = $\frac{1}{4}$
 پس اواسط حسابیہ $\frac{1}{4}$ دیم $\frac{1}{8}$ دیم $\frac{1}{16}$ دیم ہوئیں

اسلئے اواسط موسیقیہ $\frac{1}{4}$ دیم $\frac{1}{8}$ دیم $\frac{1}{16}$ دیم ہیں
 مثال ۴- سلسلہ $\frac{2}{9}$ دیم $\frac{1}{3}$ دیم $\frac{1}{18}$ دیم وغیرہ کی ساتویں رقم دریافت کرو
 ارقام کے متکافی $\frac{1}{9}$ دیم $\frac{1}{12}$ دیم $\frac{1}{18}$ دیم وغیرہ سلسلہ حسابیہ میں ہیں
 جس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ موسیقی ہے۔ اور اسلئے اس کی
 ساتویں رقم سلسلہ حسابیہ $\frac{1}{9}$ دیم $\frac{1}{12}$ دیم $\frac{1}{18}$ دیم وغیرہ کی ساتویں رقم کے
 مقلوب کے برابر ہے

اب چونکہ اس سلسلہ کا فرق مشترک = $\frac{1}{۴}$ اور رقم اول = $\frac{۱۸}{۴}$
اسلئے ساتویں رقم = $\frac{۱۸}{۴} - \frac{1}{۴} = ۴ \times \frac{1}{۴} = ۱۲ = ۳$ اسلئے سلسلہ مجوزہ کی

ساتویں رقم = $\frac{1}{۴}$

مثال ۵۔ ایک سلسلہ موسیقی کی پانچویں رقم $\frac{۲}{۵}$ ہے اور نویں رقم $\frac{1}{۴}$ اُس کی پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی پہلی رقم ۱ ہے اور فرق مشترک

تب $\frac{۲}{۵}$ = سلسلہ حسابیہ کی پانچویں رقم = $۱ + ۴ \times \text{ن}$ (۱)

اور $\frac{1}{۴}$ = سلسلہ حسابیہ کی نویں رقم = $۱ + ۸ \times \text{ن}$ (۲)

(۲) سے (۱) کو تفریق کرنے سے $۴ \times \text{ن} = \frac{1}{۴} - \frac{۲}{۵}$ اسلئے $\text{ن} = -\frac{1}{۸}$

اسلئے (۲) سے $۱ - ۲ = ۸ \times \text{ن} = ۳$

پس مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی پہلی تین ارقام ۳، ۳، ۳ و $\frac{1}{۸}$ - ۳ - $\frac{۲}{۸}$

یعنی ۳ و $\frac{۲۳}{۸}$ و $\frac{۱۱}{۴}$ ہوں گی۔

اسلئے سلسلہ موسیقیہ کی پہلی تین رقمیں $\frac{1}{۴}$ و $\frac{۸}{۴}$ و $\frac{۱۱}{۴}$ ہوں گی

مثال ۶۔ ایک سلسلہ موسیقیہ کی پہلی اور دوسری ارقام بالترتیب ۱ اور ۲

ہیں اُس کی ن ویں رقم دریافت کرو جواب $\frac{۱۰}{۱۶}$ (ن-۱) (ب-۱) $\frac{۱۰}{۱۶}$
مثال ۷۔ سلسلہ $۴ + ۲ + ۴ + ۱ + ۵ + ۵$ وغیرہ کی ن ویں رقم دریافت کرو

جواب $\frac{۱۰}{۱۶}$

۵۔ دو مثبت حقیقی مقادیر ۱ اور ۲ کے درمیان حسابی،

ہندسی اور موسیقی اواسط بالترتیب ح و ھ و م ہیں اُن کا باہمی ربط دریافت کرو۔

ہیں معلوم ہے کہ ح = $\frac{۱ + ۲}{۲}$ (۱)

$$(۲) \dots\dots\dots \text{ھ} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}}$$

$$(۳) \dots\dots\dots \text{م} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب} + ۱}$$

$$\text{اسلئے ح م} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب} + ۱} \times \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}} = \text{ا ب} = \text{ھ}$$

یعنی ح م = ھ یا ح = ھ جس سے ظاہر ہے کہ ھ اوسط ہندسی ہے ح اور م کے درمیان۔

یعنی ح دھ و م سلسلہ ہندسیہ میں ہیں یا تناسب مسلسل میں
نیز ح - ھ = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب} + ۱} - \frac{\text{ا ب}}{\text{ا}}$

$$= \frac{\text{ا ب} - \text{ا ب}}{\text{ا ب}}$$

مثبت مقادیر ہوں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دو حقیقی مثبت مقادیر کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

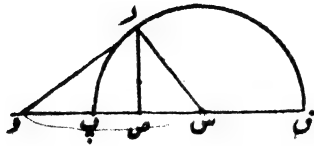
یز مساوات ھ = ح م سے ہم دیکھتے ہیں کہ ھ کی قیمت ح اور م کے درمیان واقع ہے اور یہ اوپر ثابت ہو چکا ہے کہ ح < ھ اسلئے معلوم ہوا کہ دو حقیقی مثبت مقادیر کے تین اواسط یعنی حسابیہ ہندسیہ اور موسیقیہ ترتیب متنازلہ میں ہوتے ہیں۔

$$\text{یعنی ح} < \text{ھ} < \text{م}$$

۷۷۔ اواسط ح دھ و م کی تعبیر ہندسیہ

ایک خط مستقیم و پ ق پر و پ اور و ق اُن دو مقادیر کے برابر بناؤ جن کے اواسط مطلوب ہیں۔ پ ق کی تنصیف س پر کرو

پ ق پر ایک نصف دائرہ پرق بناؤ اس ور کھینچو اور



پ ق پر عمود رس نکالو۔

$$\text{اب وپ} + \text{وق} = (\text{وس} - \text{سپ}) + (\text{وس} + \text{سق})$$

$$= 2 \text{ وس}$$

∴ وپ اور وق کے درمیان وس اوسط حسابی ہے

$$\text{اب وپ} \times \text{وق} = \text{ور}^2$$

اسلئے معلوم ہوا کہ وپ اور وق کے درمیان وراوسط ہندسی ہے

$$\text{نیز } \frac{2 \text{ وپ} \times \text{وق}}{\text{وپ} + \text{وق}} = \frac{2 \text{ ور}^2}{2 \text{ وس}}$$

$$= \frac{\text{وس} \times \text{وس}}{\text{وس}} = \text{وس}$$

اسلئے معلوم ہوا کہ وپ اور وق کے درمیان وس اوسط

موسیقی ہے

کے تین مقادیر ادب وج سلسلہ حسابیہ ہندسیہ موسیقی میں

ہوں گی اگر بالترتیب

$$\frac{1}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ج}}, \frac{1}{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ج}}, \frac{1}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{ب}}$$

$$\text{صورت اول } \frac{1-b}{b-j} = \frac{1}{j} = 1 : b = \frac{1}{j+b}$$

$$\text{صورت دوم } \frac{1-b}{b-j} = \frac{1}{b} \text{ یعنی } 1 : (b-j) = b : (1-b) \\ \text{یعنی } b^2 = 1-j$$

$$\text{صورت سوم } \frac{1-b}{b-j} = \frac{1}{j} \text{ تقریب سے ظاہر ہے}$$

۸۔ سلسلوں کے متفرق سوالات کے حل کرنے میں عام عقل اور فراست کے لئے کافی جگہ ہے ذیل کے چند اشارات طالب علم کو مفید ثابت ہونگے۔

(۱) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں میں ایک ہی مقدار جمع یا منفی کر دی جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا جس کا فرق مشترک وہی ہوگا جو اصلی سلسلے کا تھا۔

(۲) اگر سلسلہ حسابیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار میں ضرب دیدی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کر دیا جائے تو ایک نیا سلسلہ حسابیہ پیدا ہوگا۔ مگر اس کا فرق مشترک وہ نہ ہوگا جو اصلی سلسلہ حسابیہ کا تھا۔

(۳) اگر سلسلہ ہندسیہ کی تمام رقموں کو ایک ہی مقدار سے ضرب دیدی جائے یا ایک ہی مقدار پر تقسیم کر دیا جائے تو ایک نیا سلسلہ ہندسیہ پیدا ہوگا۔ اور اس کی نسبت مشترک وہی ہوگی جو پہلے سلسلے کی تھی۔

(۴) اگر $1-b$ و j دونوں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو وہ تناسب مسلسل میں ہونگے۔

۱. $f = (f + 12)^2$ یعنی $f = 2(12) = 24$ یعنی $f = 24$
 مثال ۳۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی پ، ق، د، ر، س دیں
 رقیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ پ - ق - د - ر - س
 سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

شرائط سوال سے ظاہر ہے کہ $\frac{f + (p - 1)}{f + (q - 1)} = \frac{f + (r - 1)}{f + (s - 1)}$

$$\frac{f + (r - 1)}{f + (s - 1)} =$$

$$\frac{\{f + (p - 1)\} - \{f + (q - 1)\}}{\{f + (r - 1)\} - \{f + (s - 1)\}} =$$

$$\frac{p - q}{r - s} = \frac{\{f + (p - 1)\} - \{f + (q - 1)\}}{\{f + (r - 1)\} - \{f + (s - 1)\}} =$$

اس لئے ثابت ہوا کہ پ - ق - د - ر - س سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔
 مثال ۴۔ اگر ا، ب، ج، د، د سلسلہ موسیقی کی پانچ متصل ارقام ہوں
 تو ثابت کرو کہ

$$(a + b)(c + d) = 2j(c + d)(b + d)$$

$$\text{فرض کرو کہ } a = \frac{1}{c - 2d}, b = \frac{1}{c - d}, c = \frac{1}{d}, d = \frac{1}{e + 2d}$$

اگر ا، ب، ج، د، د کی یہ قیمتیں مساوات مذکورہ بالا میں رکھ دی
 جائیں تو $(\frac{1}{c - 2d} + \frac{1}{c - d})(\frac{1}{c} + \frac{1}{e + 2d}) = 2j(\frac{1}{c - d} + \frac{1}{e + 2d})$

$$= \frac{\frac{2}{ع} (\frac{1}{ع} + \frac{1}{ط} - \frac{1}{ع} + \frac{1}{ط}) (\frac{1}{ع} + \frac{1}{ط} - \frac{1}{ع} + \frac{1}{ط})}{(ع - \frac{1}{ط})^2} = \frac{2}{ع} (\frac{1}{ع} + \frac{1}{ط} - \frac{1}{ع} + \frac{1}{ط}) (\frac{1}{ع} + \frac{1}{ط} - \frac{1}{ع} + \frac{1}{ط})$$

ظاہر ہے کہ مساوات کی ہر ایک طرف =

اسلئے ثابت ہوا کہ مساوات مذکورہ متشابه ہے۔

۹۔ سلسلہ موسیقی کی متفرق مثالیں

مثال ۱۔ اگر ا و ب د ج سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا + ج < ۲ ب$$

چونکہ دو مقداروں کا اوسط ہندسی انکے اوسط موسیقی سے بڑا ہوتا ہے اسلئے ا + ج < ۲ ب

اب چونکہ (ا - ج) ایک مثبت مقدار ہے اسلئے ا + ج < ۲ ب

اسلئے بوجہات مستحکم ا + ج < ۲ ب

مثال ۲۔ اگر چار مثبت مقادیر ا و ب د ج دد سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ثابت کرو کہ ا + د < ب + ج

اوسط موسیقی ا و ج کے درمیان = ب

" " ب " د " " ج =

اب چونکہ دو مقادیر مثبت کا اوسط حسابی ان کے اوسط موسیقی سے بڑا ہوتا ہے اسلئے

$$\frac{ا + ج}{۲} < ب \text{ اور } \frac{ب + د}{۲} < ج$$

$$\text{اسلئے } \frac{ا + ج}{۲} + \frac{ب + د}{۲} < (ب + ج)$$

$$\frac{1}{4} (د + ج) < \frac{1}{4} (ب + ج)$$

یعنی $د + ج < ب + ج$

مثال ۳۔ اگر کسی سلسلہ موسیقی کی پ دیں، ق دیں، د دیں، ر دیں
بالترتیب ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ (پ - ق) + ا، ب + (ق - ر)
ب ج + (ر - پ) ج = ۰

چونکہ ا، ب، ج سلسلہ موسیقی کی پ دیں، ق دیں، د دیں، ر دیں ہیں
اسلئے $\frac{1}{4}$ د، $\frac{1}{4}$ ب، $\frac{1}{4}$ ج مقابل کے سلسلہ حسابیہ کی پ دیں، ق دیں، د دیں
ر دیں ہیں۔

اگر اس سلسلہ حسابیہ کی رقم اول = عہ اور فرق مشترک = بہ تو

$$\frac{1}{4} = عہ + (پ - ۱) بہ = (عہ - بہ) + پ بہ \dots\dots\dots (۱)$$

$$\frac{1}{4} = عہ + (ق - ۱) بہ = (عہ - بہ) + ق بہ \dots\dots\dots (۲)$$

$$\frac{1}{4} = عہ + (ر - ۱) بہ = (عہ - بہ) + ر بہ \dots\dots\dots (۳)$$

اب (۱) کو (ق - ر) سے (۲) کو (ر - پ) سے اور (۳) کو

(پ - ق) سے ضرب دو اور جمع کرو۔

ایسا کرنے سے $\frac{1}{4} (ق - ر) + \frac{1}{4} (ر - پ) + \frac{1}{4} (پ - ق) =$

$$= (عہ - بہ) \{ (ق - ر) + (ر - پ) + (پ - ق) \}$$

$$+ بہ \{ پ (ق - ر) + ق (ر - پ) + ر (پ - ق) \} = ۰$$

$$\text{اسلئے } (ق - ر) ب ج + (ر - پ) ج + (پ - ق) ا، ب = ۰$$

مثال ۴۔ اگر مہ اور نہ ایک سلسلہ موسیقی کی م دیں اور ن دیں

رقمیں ہوں تو اس کی (م + ن) دیں رقم دریافت کرو۔

چونکہ مہ اور نہ سلسلہ موسیقی کی م اور ن دیں رقیں ہیں اسلئے

$\frac{1}{m}$ اور $\frac{1}{n}$ متقابل کے سلسلہ حسابیہ کی m دیں اور n دیں رتہیں ہوئیں پس اگر متقابل کے سلسلہ حسابیہ کی رقم اول = 1 اور فرق مشترک = n تو

$$(1) \quad \frac{1}{m} = 1 + (m-1)n \quad \text{.....}$$

$$(2) \quad \frac{1}{n} = 1 + (n-1)m \quad \text{.....}$$

(۱) کو m میں اور (۲) کو n میں ضرب دینے اور تفریق کرنے سے

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = (m-1)n - (n-1)m \quad \{ \}$$

$$= (m-1)n - (n-1)m$$

$$\text{یا } \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{(m-1)n - (n-1)m}{mn}$$

$$= (m-1)n - (n-1)m \quad \times \text{ سلسلہ حسابیہ کی } m+n \text{ دیں رقم}$$

$$\therefore \text{ سلسلہ حسابیہ کی } m+n \text{ دیں رقم} = \frac{m-n}{(m-1)n - (n-1)m}$$

$$\text{اور اسلئے سلسلہ موسیقیہ کی } m+n \text{ دیں رقم} = \frac{(m-1)n - (n-1)m}{m-n}$$

مثال ۵۔ اگر $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{a+b} \text{ و } \frac{1}{a+c} \text{ و } \frac{1}{b+c} \text{ بھی سلسلہ موسیقی میں ہیں۔}$$

$$\frac{1}{a+b} \text{ و } \frac{1}{a+c} \text{ و } \frac{1}{b+c} \text{ سلسلہ موسیقی میں ہیں}$$

$$\text{اگر } \frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b} \text{ و } \frac{1}{c} \text{ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔}$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b} \text{ و } \frac{1}{c} \text{ سلسلہ حسابیہ میں ہوں}$$

۱: ۱ - ب = ۱ + ج : ۱ - ج

۷ - اگر ایک سلسلہ موسیقی کی م دیں رقم ن ہو اور ن دیں رقم م ہو تو ثابت کرو کہ اس کی (م + ن) دیں رقم م + ن ہوگی۔
۸ - اگر ۱ اور ج کا اوسط موسیقی ب ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ب} + \frac{1}{ج} = \frac{1}{ج} + \frac{1}{ب}$$

۹ - سلسلہ موسیقی میں تین اعداد کا مجموعہ ۳۷ ہے اور ان کے مربعوں کا مجموعہ ۴۶۹ انہیں دریافت کرو۔

۱۰ - دو اعداد کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بقدر $\frac{۳}{۲}$ کے زیادہ ہے اور اوسط ہندسی ان کے اوسط موسیقی سے بقدر $\frac{۲}{۳}$ کے زیادہ ہے اعداد دریافت کرو

۱۱ - دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اواسط کے مربعوں کا فرق ۴۰۰ ہے اور ان کے ہندسی اور موسیقی اواسط کے مربعوں کا فرق ۱۳۴ ہے اعداد دریافت کرو۔

۱۲ - دو اعداد کے حسابی اور ہندسی اواسط کا فرق ۱۳ ہے ان کے ہندسی اور موسیقی اواسط کا فرق ۱۲۰ ہے اعداد معلوم کرو۔

۱۳ - اگر ۱ اور ب کا اوسط حسابی ان کے اوسط موسیقی کا م گنا ہو تو ثابت کرو کہ ۱: ب = م + م : م - م - م

۱۴ - اگر ۱ اور ب ج سلسلہ موسیقی میں ہوں تو ثابت کرو کہ
 $۱ + ج < ۲ ب$

۱۵ - اگر ج ۱ اور ب ۱ اور ب ج اور ب ج ج ۱ کے

درمیان عہد و بد و جد بالترتیب اداسط ہندسیہ ہوں اور لود
ب و ج سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ عہد و بد و جد سلسلہ
حسابیہ میں ہیں اور بد + جد + عہد + بد سلسلہ موسیقیہ میں
ہیں۔

۱۶۔ چار اعداد میں سے پہلے تین سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور آخری
تین سلسلہ موسیقیہ میں ہیں ثابت کرو کہ اول: دوم = سوم: چہارم۔
۱۷۔ اگر ص د ص د ص د سے تین حسابی سلسلوں کے مجموعت
ن ارقام تعبیر ہوں جن کی رقم اول ایک ہے اور جن کے فرق مشترک
سلسلہ موسیقیہ میں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$ن = \frac{۲ص۲ص - صص - صص}{صص + صص}$$

۱۸۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی (م + ۱) دیں (ن + ۱) دیں، اور (د + ۱) دیں
رقوم سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور م د ن و سلسلہ موسیقیہ میں ہوں
تو ثابت کرو کہ سلسلہ حسابیہ کے فرق مشترک اور رقم اول کی نسبت - $\frac{۲}{۳}$
ہے

۱۹۔ اگر تین اعداد ل د م و ن سلسلہ ہندسیہ میں ہوں اور ایک سلسلہ
حسابیہ کی ل د م و ن دیں ارقام سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو
کہ اس سلسلہ حسابیہ کی رقم اول اور فرق مشترک کی نسبت م + ۱: ۱ ہوگی
۲۰۔ اگر کسی دو مقادیر کے درمیان دو اداسط حسابیہ لا و لا، دو
اداسط ہندسیہ با و با اور دو اداسط موسیقیہ می و می مندرج کی
جائیں تو ثابت کرو کہ

۲۱۔ اگر دو اعداد کے ن واسطہ حسابیہ میں سے پہلا اوسط پ ہو اور
انہیں اعداد کے ن واسطہ موسیقیہ میں سے پہلا اوسط موسیقی قی ہو تو
ثابت کرو کہ قی کی قیمت پ اور $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ پ کے درمیان نہیں
واقع ہو سکتی۔

اس میں علامت (جج) کو اگر کسی رقم کے ماقبل رکھ دیا جائے تو اس سے ان تمام رقموں کا حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے جن کا عام نمونہ رقم مذکورہ ہے۔

۸۱۔ پہلے نطبی اعداد کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$0 + \dots + 3 + 2 + 1 = \text{ص}$$

(۱+۱)² - ۱² = ۲ × ۱ + ۱ ایک مساوات متماثل ہے۔

اب اگر لاکھ جگہ قیمتیں نون - ۱۰ نون - ۲۰ نون - ۳۰ و
۲۰ لاکھ کے بعد دیگرے مساوات مندرجہ بالا میں رکھی جائیں
تو ہمیں مساوات ذیل حاصل ہوں گی -

$$(1+n)^2 - 2n = 1 + n$$

$$1 + (1 - \alpha)^2 = 2(1 - \alpha) - \alpha^2$$

$$1 + 2 \times 2 = 2^2 - 2^0$$

$$1 + 1 \times 2 = 2 - 2$$

اگر سب مساواتوں کو جمع کیا جائے تو دائیں طرف کی رقوم سوا دو کے ایک دوسرے کو نابود کر دیں گی۔

$$\therefore (1+n)^2 = 1 + 2n + n^2$$

$$(1+n)n = (1+n)^2 - (1+n) = 2 \text{ ص } ۱$$

یا جس = $\frac{n(n+1)}{2}$

نوٹ ۱ و ۲ و ۳..... ایک سلسلہ حسابیہ ہے جس کا مجموعہ فی ارقام

$$\frac{(1+u)u}{2} = \{1 \times (1-u) + 2\} \frac{u}{2} =$$

$$\frac{(1+u)u}{2} = \{1 \times (1-u) + 2\} \frac{u}{2} =$$

۸۲ - ن طبعی اعداد اولیہ کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت کرو
 مساوات متشابهہ (۱+۳) - ۳ = ۳ لا + ۳ لا + ۳ لا + ۱ میں یکے
 بعد دیگرے لا = ن ولا = ن - ۱ - ۰۰۰۰ لا = ۲ ولا = رکھنے سے

$$۱ + ۳ + ۳ + ۳ = ۳(۱ + ن)$$

$$۱ + (۱-ن)۳ + ۳(۱-ن)۳ = ۳(۱-ن)۳$$

$$۱ + ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ = ۲ - ۳$$

$$۱ + ۱ \times ۳ + ۱ \times ۳ = ۱ - ۳$$

ان مساواتوں کو جمع کرنے سے

$$(۱ + ن)۳ = ۱ - ۳ + ۳ + ۳ + ن$$

چونکہ ۳ کی قیمت ہم پہلے دریافت کر چکے ہیں - اسلئے

$$۳ + ۳ = (۱ + ن)۳ - ۳(۱ + ن) - (۱ + ن)$$

$$\left\{ ۲ - ۳ - ۲(۱ + ن) \right\} \frac{(۱ + ن)}{۲} =$$

$$\frac{(۱ + ن)(۲ - ۲ - ۲ن)}{۲} =$$

$$\frac{(۱ + ن)(۱ - ۲ن)}{۲} = ۳ + ن$$

۸۳ - پہلے ن طبعی اعداد کے مکعبوں کا حاصل جمع دریافت کرو

مساوات متشابهہ (۱+۳) - ۳ = ۳ لا + ۳ لا + ۳ لا + ۳ لا + ۱ میں بالترتیب
 لا = ن ولا = ن - ۱ - ۰۰۰۰ لا = ۲ ولا = ۱ رکھنے سے

$$۱ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۳(۱ + ن)$$

پ^۱ ن^۱ + پ^۲ ن^۲ + پ^۳ ن^۳ + + پ^{۱۰۰} ن^{۱۰۰} (۱)
 ہے جہاں پ^۱، پ^۲، پ^۳، میں ن شامل نہیں ہے۔
 اس کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔
 فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ص ہے

$$ص = پ^۱ + پ^۲ + پ^۳ + + پ^{۱۰۰}}$$

$$+ پ^۲ + پ^۳ + + پ^{۱۰۰}}$$

$$+ پ^۳ + + پ^{۱۰۰}}$$

$$+ پ^{۱۰۰}}$$

جمع کرنے سے

$$ص = پ^۱ + پ^۲ + پ^۳ + + پ^{۱۰۰}}$$

اس سے معلوم ہوا کہ اگر ہم کو پہلے ن طبعی اعداد کی پہلی
 دوسری، تیسری، دیں تو توں کے حاصل جمع معلوم ہوں
 تو ہم اس سلسلے کا مجموعہ ن ارقام دریافت کر سکتے ہیں جس کی رقم
 (۱) ہے۔ اور ہمیں معلوم ہے کہ طبعی اعداد کی تمام توں کے
 حاصل جمع دریافت ہو سکتے ہیں اس لئے سلسلہ مجوزہ کا حاصل جمع
 بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۔ سلسلہ کی ن ویں رقم ۱ + ۸ + ۶ + ہے اس کا
 حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ حاصل جمع ص ہے

مجموعہ اُن اعداد کے مجموعہ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے اس میں ضروری نہیں کہ اعداد ایک سے شروع ہوں۔

فرض کرو کہ پ + ۱ + پ + ۲ + پ + ۳ + + پ + ن
ن متصل صحیح اعداد ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

(پ + ۱) + (پ + ۲) + (پ + ۳) + + (پ + ن)
جملہ (پ + ۱) + (پ + ۲) + (پ + ۳) + + (پ + ن) پر
پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ص اور ص بالترتیب دو مندرجہ بالا سلسلوں کے مجموعوں
کو تعبیر کرتے ہیں تب

$$\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (پ + ن)^2 \} = \text{ص}$$

$$\{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + پ^2 \} -$$

$$= \left\{ \frac{(پ + ن)(پ + ن + ۱)}{۲} \right\} - \left\{ \frac{پ(پ + ۱)}{۲} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(پ + ن)(پ + ن + ۱)}{۲} \right\} \times \left\{ \frac{پ(پ + ۱)}{۲} + \frac{(پ + ن)(پ + ن + ۱)}{۲} \right\} =$$

$$- \left\{ \frac{پ(پ + ۱)}{۲} \right\}$$

$$\text{اور ص} = \{ 1 + ۲ + ۳ + \dots + (پ + ن) \} - \{ ۱ + ۲ + ۳ + \dots + پ \}$$

$$= \frac{(پ + ن)(پ + ن + ۱)}{۲} - \frac{پ(پ + ۱)}{۲}$$

اس سے ظاہر ہے کہ ص جزو ضربی ہے ص کا جس سے دعویٰ ہمارا

ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۴۔ سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ... کا حاصل جمع n ارقام تک دریافت کرو۔

$$\text{سلسلہ مجوزہ کی } n \text{ دیں رقم} = \{1 + (n-1) \times 1\} = (n-1) + 1 = n$$

$$= n - 1 + 1$$

اس لئے اگر v سے مجموعہ مطلوبہ کو تعبیر کریں تو

$$v = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = (1 + n) + (2 + n-1) + \dots + (n + 1)$$

$$= n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(1+n)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(1+n)}{2}$$

$$= \frac{n}{3} \{1 + (n-1)\} = \frac{n}{3} (1 + n - 1) = \frac{n}{3} (1 + n)$$

یا بطرز دیگر

$$v = \{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n\} = \{1 + (n-1)\} + \{2 + (n-2)\} + \dots + \{n + 1\}$$

$$= \{1 + (n-1)\} + \{2 + (n-2)\} + \dots + \{n + 1\}$$

$$= \{1 + (n-1)\} + \{2 + (n-2)\} + \dots + \{n + 1\}$$

$$= \{1 + (n-1)\} + \{2 + (n-2)\} + \dots + \{n + 1\}$$

$$= \frac{n(n+1)(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)(1+n)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(1+n)}{2}$$

$$\frac{n}{3} = \frac{(1+n^2)(1+n)}{3} = \frac{n}{3}(n^2+1)$$

مثال ۵ - سلسلہ ۲ × ۲ + ۳ × ۲ + ۴ × ۲ + ... کا مجموعہ n رقموں تک دریافت کرو۔

سلسلہ مجوزہ کی n دیں رقم = (n+1) n² + n³ =
اسلئے پہلی رقم = ۱ + ۱^۲ دوسری رقم = ۲ + ۲^۲ تیسری رقم = ۳ + ۳^۲
اور علیٰ ہذا القیاس

اسلئے حاصل جمع n ارقام = ص = (۱ + ۱^۲ + ۲ + ۲^۲ + ... + n + n^۲)

$$= \frac{n^2(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)(1+n^2)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \left\{ \frac{n+1}{2} + \frac{n}{3} \right\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \times \frac{2n+1+n}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(n+2)}{12}$$

مثال ۶ - سلسلہ ۳ × ۳ + ۸ × ۴ + ۱۱ × ۵ + ۱۴ × ۶ + ... کا مجموعہ n رقموں تک دریافت کرو۔

صریحاً سلسلہ کی n دیں رقم = (n دیں رقم سلسلہ ۳ × ۳ + ۴ × ۴ + ۵ × ۵ + ... کی) × (n دیں رقم سلسلہ ۸ × ۸ + ۱۱ × ۱۱ + ۱۴ × ۱۴ + ... کی)

$$= 3n^2 + 9n + 15$$

اسلئے پہلی رقم $= 1 \times 15 + 1 \times 9 = 24$ دوسری رقم $= 2 \times 15 + 2 \times 9 = 42$ و

تیسری رقم $= 3 \times 15 + 3 \times 9 = 60$ و.....

اگر سلسلے کا حاصل جمع ص ہو تو

$$\text{ص} = 9 = (1 + 2 + \dots + n) \times 15 + (1 + 2 + \dots + n) \times 9$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times 15 + \frac{n(n+1)}{2} \times 9$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times 24 = \frac{n(n+1)}{2} \times 24 = 12n(n+1)$$

مثال ۷۔ سلسلہ $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots$ کون رقموں تک جمع کرو۔

سلسلہ مجوزہ کی n دیں رقم $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \times 1^3 + \frac{1}{6} \times 2^3 + \frac{1}{6} \times 3^3 + \dots + \frac{1}{6} \times n^3$$

$$= \frac{1}{6} \times 1^3 + \frac{1}{6} \times 2^3 + \frac{1}{6} \times 3^3 + \dots + \frac{1}{6} \times n^3$$

$$= \frac{1}{6} \times 1^3 + \frac{1}{6} \times 2^3 + \frac{1}{6} \times 3^3 + \dots + \frac{1}{6} \times n^3$$

تیسری رقم $= 3 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ اور علیٰ ہذا نقیصاً

اگر حاصل جمع مطلوب کو ص سے تعبیر کریں تو

$$\text{ص} = \frac{1}{6} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$$

$$+ \frac{1}{6} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + \frac{1}{6} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) =$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{n(n+1)}{2} \times 3 = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\frac{n(1+n)}{12} = \{n(1+n) + (1+n) + 1\}$$

$$\frac{n(1+n)}{12} = \{n^2 + n + 2\} \quad \frac{n(1+n)^2}{12} = \{n^3 + n^2 + 2n + 2\}$$

۸۶۔ سلسلوں کے جمع کرنے کی چند خاص صورتیں

امثلہ ذیل چند کارآمد عملی حکمتوں اور ترکیبوں کی توضیح کے لئے منتخب کی گئی ہیں ان کی استعمانت سے خاص خاص قسم کے سلسلوں کا مجموعہ آسانی معلوم ہو سکتا ہے ذیل کے سلسلے دفعتاً گزشتہ کے سلسلوں سے کئی لحاظ سے مختلف ہیں۔ ان میں بالعموم n دیں رقم کا دریافت کرنا مشکل ہوگا اسلئے طالب علم کو چاہیئے کہ طرز عمل کے اس حصہ کو خاص توجہ سے پڑھے

مثال ۱۔ سلسلہ $1 + 5 + 12 + 22 + 35 + \dots$ کو n رتوں تک جمع کر [خصوصیت اس سلسلے کی یہ ہے کہ ارقام متصلہ کے متواتر فرق سلسلہ حسابیہ میں ہیں]

فرض کر دو کہ $ص =$ حاصل جمع مطلوب اور $ق_n = n$ دیں رقم

$$تب ص = 1 + 5 + 12 + 22 + \dots + ق_n$$

$$نیز ص = 0 + 1 + 5 + 12 + \dots + ق_{n-1} + ق_n$$

اسلئے تفریق سے

$$0 = 1 + 5 + 12 + \dots + (ق_n - ق_{n-1}) - ق_n$$

$$= \{1 + 5 + 12 + \dots + (ن ارقام تک) - ق_n\}$$

۸۷۔ مندرجہ ذیل کا احتیاط سے مطالعہ کرنا چاہیے اس قسم کی تقلیب و ترتیب سے ہم کئی قسم کے سلسلے جمع کر سکتے ہیں جنکی رقوم کسری ہوں اور جن کے نسب نہا کسی خاص قانون کے مطابق مرتب کئے گئے ہوں۔

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ اور } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

ہر ایک صورت میں ہر ایک رقم کو بطور دو جملوں کے فرق کے بیان کیا گیا ہے۔
مثال ۱۔ سلسلہ $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$ کون ارتقام تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ ص = حاصل جمع ن ارتقام اور ق = ن میں رقم

$$\text{اب ق}_1 = \frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\text{ق}_2 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\text{ق}_3 = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\text{قہ} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{اسلئے ص} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

مثال ۲۔ سلسلہ $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$ کو ن ارقام تک جمع کرو۔

ظاہر ہے کہ ن ویں رقم کا نسب نما

$$= (n \text{ ویں رقم سلسلہ } 1 \text{ اور } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ کی})$$

$$\times (n \text{ ویں رقم سلسلہ } 2 \text{ و } 3 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 6 \text{ و } \dots \text{ کی})$$

$$= \{3(1-n) + 2\} \times \{3(1-n) + 1\} =$$

$$(1+n3)(2-n3) =$$

$$\text{اسلئے قہ} = \frac{1}{(1+n3)(2-n3)}$$

$$\text{اب قہ} = \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{3} - (1 - \frac{1}{3})$$

$$\text{قہ} = \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

$$\text{قہ} = \frac{1}{10 \times 6} = \frac{1}{6} - (\frac{1}{10} - \frac{1}{6})$$

$$\text{قہ} = \frac{1}{(1+n3)(2-n3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+n3} - \frac{1}{2-n3} \right)$$

$$\text{اسلئے ص} = \frac{1}{3} - (1 - \frac{1}{1+n3}) = \frac{n}{1+n3}$$

مثال ۳۔ سلسلہ $\frac{1}{13 \times 10 \times 7} + \frac{1}{10 \times 7 \times 4} + \frac{1}{7 \times 4 \times 1} + \dots$
کا مجموعہ ن رقموں تک دریافت کرو۔

ن ویں رقم کا نسب نما = (ن ویں رقم سلسلہ ۴ و ۷ و ۱۰ کی)

\times (ن ویں رقم سلسلہ ۴ و ۷ و ۱۰ کی)

\times (ن ویں رقم سلسلہ ۷ و ۱۰ و ۱۳ کی)

$$\{ 3(1-n) + 4 \} \times \{ 3(1-n) + 7 \} \times \{ 3(1-n) + 10 \} =$$

$$= (4+n)(7+n)(10+n)$$

$$\text{اسلئے قن} = \frac{1}{(4+n)(7+n)(10+n)}$$

$$\text{اب ق}_1 = \frac{1}{4 \times 7 \times 10} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4 \times 7} - \frac{1}{7 \times 10} \right)$$

$$\text{ق}_2 = \frac{1}{7 \times 10 \times 13} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7 \times 10} - \frac{1}{10 \times 13} \right)$$

$$\text{ق}_3 = \frac{1}{10 \times 13 \times 16} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10 \times 13} - \frac{1}{13 \times 16} \right)$$

$$\text{قن} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(4+n)(7+n)} - \frac{1}{(7+n)(10+n)} \right\}$$

$$\text{اسلئے ص} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(4+n)(7+n)} - \frac{1}{7 \times 10} \right\}$$

$$= \frac{9n + 15}{4(4+n)(7+n)}$$

$$= \frac{n(9+n)}{4(4+n)(7+n)}$$

گولیوں کے انبار

۸۸۔ ایک مکمل مینار (مخروط مضیق) کی شکل میں جو مربع قاعدے پر قائم ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔
فرض کرو کہ قاعدے کے



ہر ایک ضلع میں n گولیاں ہیں
سب سے پچھلی تہ میں گولیوں
کی تعداد n^2 ہوگی۔ اس سے
اوپر کی تہ میں $(n-1)^2$ اور
اس سے اوپر کی تہ میں $(n-2)^2$

اور علیٰ ہذا نقیاس یہاں تک کہ چوٹی پر صرف ایک گولی ہوگی
اس لئے تعداد مطلوبہ ص = $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{[دفعہ ۸۲]}$$

۸۹۔ ایک ایسے مکمل مینار کی شکل میں جس کا قاعدہ مثلث متساویہ الاضلاع ہے چند گولیاں ترتیب دی گئی ہیں ان کی تعداد دریافت کرو۔



فرض کرو کہ قاعدے کے ہر ایک ضلع میں
 n گولیاں ہیں سب سے پچھلی تہ میں گولیوں کی تعداد

$$= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{n(n+1)}{2} =$$

اگر ہم اس نتیجے میں ن کی بجائے ن-۱ اور ن-۲ اور ن-۳ وغیرہ لکھیں تو ہمیں بالترتیب دوسری تیسری چوتھی تہ میں گولیوں کی تعداد معلوم ہو جائے گی۔
اسلئے ص = $\frac{1}{6} (جج ن + جج ن)$

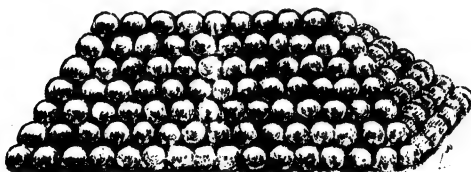
$$\begin{cases} ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن = ۲۰ \text{ دفعہ} \\ ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن = ۲۰ \text{ دفعہ} \end{cases}$$

$$\text{اسلئے ص} = \frac{ن(ن+۱)(۲+ن)}{۶}$$

۹۰۔ گولیوں کا ایک مکمل انبار مستطیل قاعدے پر کھڑا ہے اس میں کل گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ قاعدے کے بڑے اور چھوٹے منہ میں بالترتیب م اور ن گولیاں ہیں سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی صرف ایک قطار ہے جس میں م-(ن-۱) یعنی (م-ن+۱) گولیاں ہیں۔

اس سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد = $۲(م-ن+۱)$
اس سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد = $۳(م-ن+۱)$ اور علیٰ ہذا القیاس
سب سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد = $ن(م-ن+۱)$



$$\text{اسلئے ص} = (م-ن+۱) + (م-ن+۲) + (م-ن+۳) + \dots + ن$$

$$(م - ن)(ن + ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن) + (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن) =$$

$$= \frac{(م - ن)ن(ن + ۱)}{۲} + \frac{ن(ن + ۱)}{۲}$$

$$= \frac{ن(ن + ۱)}{۲} \{۳ - م + ن\}$$

۹۱۔ گولیوں کا ایک نامکمل انبار ایک مستطیل قاعدے پر کھڑا ہے اُس میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سب سے اوپر کی تہ کے دونوں اضلاع میں گولیوں کی تعداد بالترتیب ۱ اور ۲ ہے اور انبار میں کل تہوں کی تعداد ۳ ہے سب سے اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد = ۱

اس سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (۱ + ۲)

اس سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (۲ + ۳)

اور علیٰ ہذا تعیاس

سب سے پہلی تہ میں گولیوں کی تعداد = (۱ + ۲ + ۳)

$$= ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + (ن - ۱) + ن$$

$$= \frac{ن(ن + ۱)}{۲}$$

$$= \frac{ن(ن + ۱)}{۲} + \frac{ن(ن + ۱)}{۲}$$

$$= \frac{ن}{۲} \{۳ + ۲ + ۱ + \dots + (ن - ۱) + ن\}$$

۹۲۔ عددی مثالوں میں ذیل کی ترکیب کا استعمال زیادہ آسان ہو گا۔

مثال۔ ایک گولیوں کا نامکمل انبار مربع قاعدے پر کھڑا ہے اس میں

۱۶۔ اتنیس ایک دوسرے کے اوپر رکھی ہوئی ہیں سب سے اوپر کی تہ کے ہر ایک ضلع میں ۱۲ گولیاں ہیں انبار میں کل گولیوں کی تعداد دریافت کرو اگر ہم اس انبار پر ایک اور مربع انبار جس کے قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۱۱ گولیاں ہوں رکھ دیں تو ہمیں ۲۷ تہوں کا ایک مربع انبار حاصل ہوگا۔

$$\frac{۵۵ \times ۲۸ \times ۲۷}{۶} = \text{اس مکمل انبار میں گولیوں کی تعداد}$$

$$۶۹۳۰ = [\text{وضہ ۸۸}]$$

اُن گولیوں کی تعداد جو نامکمل ڈھیر کے اوپر رکھی گئی ہیں

$$۵۰۶ = \frac{۲۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۶}$$

اسلئے نامکمل انبار میں گولیوں کی تعداد = ۶۹۳۰ + ۵۰۶ = ۷۴۳۶

امثلہ نمبری ۹

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

$$۱ - ۵ + ۷ + ۹ + \dots + ۲۵$$

$$۲ - ۲ + ۵ + ۸ + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

$$۳ - ۲ \times ۱ + ۳ \times ۲ + ۳ \times ۳ + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

$$۴ - ۲ \times ۱ + ۳ \times ۲ + ۴ \times ۳ + ۴ \times ۴ + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

$$۵ - ۳ \times ۱ + ۴ \times ۲ + ۵ \times ۳ + ۶ \times ۴ + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

$$۶ - ۳ \times ۱ + ۴ \times ۲ + ۵ \times ۳ + ۶ \times ۴ + ۶ \times ۵ + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

$$۷ - ۳ + ۳ + ۵ + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

$$۸ - ۱ + (۱+۲) + (۲+۳) + \dots + \text{کون رتوں تک}$$

۹۔ ایک سلسلے کی n دیں رقم $(1-n)$ $(1+n)$ ہے اس کا مجموعہ ۱۵ رقموں تک دریافت کرو۔

۱۰۔ کسی سلسلے کی n دیں رقم $(1+n)$ $(1+n)$ ہے اس کی ۲۵ رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

$$11 - 1 + 3 + 4 + 10 + 15 + \dots \text{کون رقموں تک}$$

$$12 - 1 + 4 + 15 + 28 + 45 + \dots \text{کون "}$$

$$13 - 1 + 8 + 21 + 40 + 65 + \dots \text{کون "}$$

$$14 - 1 + 9 + 22 + 45 + 72 + \dots \text{کون "}$$

$$15 - 1 + 10 + 24 + 52 + 85 + \dots \text{کون "}$$

$$16 - 1 + 12 + 32 + 56 + 84 + \dots \text{کون "}$$

$$17 - 1 + 13 + 33 + 57 + 81 + \dots \text{کون "}$$

$$18 - 1 + 14 + 35 + 58 + 82 + \dots \text{کون "}$$

$$19 - 1 + 16 + 37 + 60 + 83 + \dots \text{کون "}$$

$$20 - 1 + 17 + 39 + 62 + 85 + \dots \text{کون "}$$

$$21 - 1 + 18 + 41 + 64 + 87 + \dots \text{کون "}$$

$$22 - 1 + 19 + 43 + 66 + 89 + \dots \text{کون ارقام تک}$$

$$23 - \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots \text{کون "}$$

$$24 - \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots \text{کون "}$$

$$25 - \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \dots \text{کون "}$$

$$۲۶ - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{15 \times 16} + \dots \dots \dots \text{کون ارتقام تک}$$

$$۲۷ - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{12 \times 13} + \frac{1}{16 \times 17} + \dots \dots \dots \text{کو ۴۹}$$

$$۲۸ - \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{13 \times 14} + \frac{1}{17 \times 18} + \dots \dots \dots \text{کون}$$

گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۹۔ ایک مربع انبار میں جس کے قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۵ گولیاں ہیں

۳۰۔ ایک مثلثی انبار میں جس کے قاعدے کے ہر ایک ضلع میں ۸ گولیاں ہیں

۳۱۔ ایک مستطیلی انبار میں جس کے قاعدے کے طول اور عرض میں بالترتیب

۵۰ اور ۲۸ گولیاں ہیں۔

۳۲۔ ایک ایسے نامکمل مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو جسکے

قاعدے کے ایک ضلع میں ۲۵ گولیاں ہیں اور سب سے اوپر کی تہ کے

ایک ضلع میں ۴ گولیاں ہیں۔

۳۳۔ ایک نامکمل مربع انبار میں ۲۷ تہیں ہیں اور قاعدے کے

ہر ایک ضلع میں ۴۰ گولیاں ہیں۔ گولیوں کی کل تعداد دریافت کرو۔

۳۴۔ ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی تعداد ۲۴۳۹۵ ہے اگر

قاعدے کے عرض میں ۳۴ گولیاں ہوں تو طول میں کتنی گولیاں ہونگی؟

۳۵۔ کسی مربع انبار کی سب سے اونچی تہ میں گولیوں کی تعداد ۱۹۹ ہے

اور سب سے کچلی تہ میں ۱۰۸۹ معلوم کرو کہ کل انبار میں کتنی گولیاں

ہیں؟

۳۶۔ ایک مکمل مستطیلی انبار میں گولیوں کی ۱۵ تہیں ہیں اور قاعدے

کے بڑے ضلع میں ۲۰ گولیاں ہیں معلوم کرو کہ انبار میں کل گولیاں کتنی ہیں؟
 ۳۷۔ ایک نامکمل مستطیلی انبار کی سب سے اونچی تہ کے دواضلع میں ۱۱
 اور ۱۸ گولیاں ہیں اور سب سے پچلی تہ کے چھوٹے ضلع میں ۳۰ گولیاں
 ہیں انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک نامکمل مستطیلی انبار کی اوپر کی تہ کے دونوں اضلاع میں ۱۵
 اور ۶ گولیاں ہیں معلوم کرو کہ کتنی اور گولیاں انبار کی تکمیل کے لئے کافی
 ہوں گی؟

۳۹۔ ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد ایک مربع انبار کی گولیوں
 کی نصف تعداد سے بقدر ۱۵۰ کے زیادہ ہے اور ہر ایک انبار میں تہوں
 کی تعداد یکساں ہے۔ مثلثی انبار کی سب سے پچلی تہ میں گولیوں کی تعداد
 دریافت کرو۔

۴۰۔ ایک نامکمل مربع انبار میں ۱۶ تہیں ہیں اوپر کی تہ میں گولیوں کی تعداد
 پچلی تہ کی تعداد سے بقدر ۱۰۰۵ کے کم ہے انبار میں گولیوں کی تعداد
 دریافت کرو۔

۴۱۔ ثابت کرو کہ ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد اُس تعداد کی
 ایک چوتھائی ہے جو ایک ایسے مثلثی ڈھیر میں موجود ہو جس میں گولیوں
 کی تہیں یا طبقے پہلے انبار سے دوچند ہوں۔

۴۲۔ اگر ایک مثلثی انبار میں گولیوں کی تعداد کو نسبت اُن گولیوں کی تعداد سے
 جو ایک مربع انبار میں شامل ہیں ۱۳:۱۵ ہو اور مثلثی انبار کی نسبت مربع انبار
 میں تہوں کی تعداد دوچند ہو تو ہر ایک انبار میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴۳۔ گولیوں کے ۱۶ پونڈوز فی مثلثی انبار کی قیمت ۱۵ پونڈ ہے اگر

ایک ہنڈرویت لوہے کی قیمت ۱۰ اشلنگ ۶ پنس ہو تو سب سے
 پچھلی تہ میں گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔
 ۴م۔ اگر ایک مکمل مربع انبار سے جس میں n مختلف تہیں یا طبقے
 ہیں کچھ گولیاں لیکر ایک ایسا مثلثی انبار بنایا جائے جس میں تہوں کی
 تعداد وہی ہو جو مربع انبار میں ہے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ گولیوں کی
 تعداد سے ایک اور مثلثی انبار بن سکتا ہے۔ اس انبار کے ایک ضلع میں
 گولیوں کی تعداد دریافت کرو۔

باب ہفتم

مقادیر اصم

۹۳- تعریفات۔ اگر کسی عدد حسابی کا جذریا نزول ٹھیک ٹھیک دریافت نہ ہو سکے تو اسے مقدار اصم یا غیر ناطق کہتے ہیں۔ مثلاً ۲۱۸ و ۶۱۸ و ۴۱۸ و ۴۱۸ مقدار اصم ہیں۔

نوٹ۔ جس عدد حسابی کا جذر پورا پورا انقل کے اس کو مقدار ناطق یا منطق کہتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ہر ایک عدد حسابی کا جذر یا تو ناطق ہو گا یا غیر ناطق مثلاً ۸، ۲۵، ۱۲۱ ناطق ہیں اور مقادیر ۲۱۸، ۴۱۸ و ۶۱۸ غیر ناطق ہیں۔ مالا کی صورت کے جبر کے جلے کو ہمیشہ مقدار اصم کہتے ہیں خواہ لاکھ کی قیمت ایسی ہو کہ فی الحقیقت مالا مقدار اصم نہ ہو مثلاً اگر $۴ = ۴$ تو مالا = $۴ = ۲$ جو مقدار اصم نہیں ہے۔

دو یا زیادہ مقادیر اصم کو متشابه کہتے ہیں اگر ان کی تحویل ایک ہی جڑ ضربی اصم کی طرف ہو سکے مثلاً ۴۱۸ اور ۲۱۸ متشابه مقادیر اصم ہیں کیونکہ وہ جدا گانہ ۳۱۸ اور ۲۱۸ کے برابر ہیں۔

جب مقادیر اصم کی علامت جلد کا قوت نما ایک ہی ہو تو انہیں ایک ہی درجہ کی مقادیر اصم کہتے ہیں مثلاً ۴۱۸ و ۲۱۸ و $(۱+۱) \frac{۱}{۲}$ سب دوسرے درجے کی مقادیر اصم ہیں۔

ایک ایسے جملے کو جس میں دو یا زیادہ مفرد مقادیر اصم علامات
+ اور - سے مربوط ہوں مرکب اصم کہتے ہیں مثلاً ۵ ماہ ۲۱ اور
۴ ماہ ۳ مفرد مقادیر اصم ہیں لیکن ۵ ماہ ۲ + ۳ ماہ ۳ اور
۵ ماہ ۲ - ۳ ماہ ۳ مرکب مقادیر اصم ہیں۔

۹۴ - اگر دو مقادیر اصم ایسی ہوں کہ اُن کا حاصل ضرب ناطق
ہو تو اسے حسابی اصطلاح میں اس طرح بیان کرتے ہیں کہ ہر ایک
مقدار مذکورہ دوسری مقدار میں ضرب کھانے سے ناطق یا منطق بن جاتی
ہے مثلاً ۲ ماہ اور ۳ ماہ + ۲ ماہ بالترتیب ۱ ماہ اور ۳ ماہ - ۲ ماہ
میں ضرب کھانے سے ناطق بن جاتی ہیں کیونکہ

$$۲ ماہ \times ۵ ماہ = ۱۰$$

$$\text{اور } (۳ ماہ + ۲ ماہ)(۳ ماہ - ۲ ماہ) = ۳ - ۲ = ۱$$

اگر درجہ دوم کے دو ثنائی اصم جملوں میں ارقام ایک ہی ہوں مگر
وہ علامات جس کے ذریعے اُن کی دونوں رقیں مربوط ہیں مختلف ہوں
تو انہیں ایک دوسرے کا زوج یا متمم کہتے ہیں مثلاً ۳ ماہ + ۲ ماہ
اور ۲ ماہ - ۱ ماہ کے زوج یا متمم بالترتیب ۳ ماہ - ۲ ماہ اور
۲ ماہ + ۱ ماہ ہیں

اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک ثنائی مقدار اصم درجہ دوم ناطق بن جاتی
ہے اگر وہ متمم مقدار اصم میں ضرب دیدی جائے اسلئے ایک ایسی کسر
اصم کی تحویل جس کا نسب نما ثنائی اصم درجہ دوم ہو ایک ایسی کسر مساوی
کی طرف ہو سکتی ہے جس کا نسب نما ناطق ہو

نیز ایک ایسی کسر کا نسب نما جس میں تین مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں

ناطق بن سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسر مجوزہ $\frac{1}{\overline{ما ب} + \overline{ما ج} + \overline{ما د}}$ ہے اگر اس کے

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\overline{ما ب} + \overline{ما ج} + \overline{ما د}$ کے زوج یعنی $\overline{ما ب} + \overline{ما ج} - \overline{ما د}$ میں ضرب دی جائے تو اس عمل کے بعد

نئی کسر کا نیا نسب نما $(\overline{ما ب} + \overline{ما ج}) - (\overline{ما د})$ یعنی $ب + ج - د$ ہوگا۔ اب اگر ایک دفعہ اور شمار کنندہ اور نسب نما

دونوں کو نئے نسب نما کے زوج $(ب + ج - د)$ میں ضرب دیا جائے تو اس سے نسب نما ناطق بن جائیگا یعنی آخری نسب نما

$= (ب + ج - د) - ۲$ جو ایک مقدار ناطق ہے

مثال ۱۔ معلوم ہے $\overline{ما} = ۲۱۴$ و ۱۲ تین مرتبہ کے اعشاریہ تک

$\frac{۲۱۴ + ۱}{۲۱۴ - ۳}$ کی قیمت دریافت کرو

$$\frac{(۲۱۴ + ۱)(۲۱۴ - ۳)}{(۲۱۴ - ۳)(۲۱۴ - ۳)} = \frac{۲۱۴ + ۱}{۲۱۴ - ۳}$$

$$\overline{ما} ۵ + ۷ = \frac{۴ + ۲۱۴۲ + ۲۱۴۳ + ۳}{۸ - ۹} =$$

$$۱۴۶۰۷۰ = ۷۰۷۰ + ۷ = ۱۴۶۱۴ \times ۵ + ۷ =$$

مثال ۲۔ $\frac{\overline{لا} - ۱ - \overline{لا} + ۱}{\overline{لا} - ۱ + \overline{لا} + ۱}$ کے نسب نما کو ناطق بناؤ

$$\frac{۲(\overline{لا} - ۱ - \overline{لا} + ۱)}{(\overline{لا} - ۱ - \overline{لا} + ۱)(\overline{لا} - ۱ + \overline{لا} + ۱)} = \text{جملہ مجوزہ}$$

$$\frac{\sqrt{4} - \sqrt{1} - 1}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1} - 2}{\sqrt{4} \cdot 2} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1} - (2 - 1) + (2 + 1)}{(2 - 1) - (2 + 1)} =$$

مثال ۳۔ جملہ $\frac{\sqrt{4} + 3}{5 \cdot \sqrt{4} + 3 \sqrt{4} - 13 \sqrt{4} \cdot 2 - 3 \sqrt{4} \cdot 5}$ کو مختصر صورت میں لاؤ

نسب نما = $\sqrt{4} + 3 = \sqrt{4} \cdot 5 + \sqrt{4} \cdot 3 - 3 \sqrt{4} \cdot 2 \times 2 - 3 \sqrt{4} \cdot 5$
 $\frac{(\sqrt{4} - 3 \sqrt{4})(\sqrt{4} + 3)}{(\sqrt{4} - 3 \sqrt{4})(\sqrt{4} + 3)} = \frac{\sqrt{4} + 3}{\sqrt{4} + 3 \sqrt{4}} =$ اس کے کسر مجوزہ

$$3 \sqrt{4} = \frac{3 \sqrt{4} \cdot 2 - \sqrt{4} \cdot 3 + \sqrt{4} \cdot 3 - 3 \sqrt{4} \cdot 3}{2 - 3} =$$

مثال ۴۔ $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ کو ایسی صورت میں تبدیل کرو جس کا نسب نما

ناطق ہو۔

جملہ = $\frac{\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \} \epsilon}{\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \} \{ \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \}} = \frac{\epsilon}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

نسب نما = $\frac{1}{\sqrt{2}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 + 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) =$

اس کے جملہ مجوزہ = $\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} - 3) \{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \} \epsilon}{(\frac{1}{\sqrt{2}} - 3) (\frac{1}{\sqrt{2}} + 3)} = \frac{\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \} \epsilon}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 3}$

$$\frac{(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3 - 3) \epsilon}{2 - 9} =$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3 - 1 =$$

مثال ۵۔ مختصر کرو

$$\frac{12}{\sqrt{18} - \sqrt{5} + 3} = \frac{(12)(\sqrt{18} + \sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{18} + \sqrt{5} + 3)(\sqrt{18} - \sqrt{5} + 3)} = \frac{(12)(\sqrt{18} + \sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{18})^2 - (\sqrt{5})^2 + 6}$$

$$= \frac{(12)(\sqrt{18} + \sqrt{5} + 3)}{18 - 5 + 6} = \frac{(12)(\sqrt{18} + \sqrt{5} + 3)}{19}$$

$$= \frac{(12)(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 3)}{19}$$

۹۵۔ فرض کرو کہ ف ایک جملہ صحیح چند معین مقادیر اہم کا ہے اور ق ایک اور جملہ صحیح انہی مقادیر اہم کا ہے اور دونوں جملے ایسے ہیں کہ ف اور ق کا حاصل ضرب ناطق ہے اس میں ق کو ف کا منطبق جز ضربی بلحاظ ان معین مقادیر اہم کے کہتے ہیں ظاہر ہے کہ اگر کسی منطبق اہم کا ایک منطبق جز ضربی معلوم ہو جائے تو اس کو کسی اور ناطق جز ضربی میں ضرب دینے سے بیشتر منطبق اجزاء ضربی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۹۶۔ کسی مفرد جملہ اہم کا منطبق جز ضربی دریافت کرو۔

(۱) فرض کرو کہ زیر بحث صرف مقادیر اہم درجہ دوم ہیں اور ان کا تعداد دو ہے یعنی ہا ف اور ہا ق ان دو مقادیر اہم کے مفرد جملہ صحیح کی صورت عامل = $\{ \frac{1}{2} (ف) \} + ۱ \times \{ \frac{1}{2} (ق) \} + ۱$

ہے جس میں ہا ناطق ہے جفت قوت نما لینے کی ضرورت نہیں کیونکہ $\{ \frac{1}{2} (ف) \} + ۱ = ۲$ ف جو کہ ایک مقدار ناطق ہے۔

اب ل = $\{ \frac{1}{2} (ف) \} + ۱$ ف $\frac{1}{2} ق$

خطوط وحدانی کے اندر جو جملے کا حصہ ہے وہ ناطق ہے۔

اسلئے معلوم ہوا کہ منطق جز ضربی ف ق $\frac{1}{4}$ ہے کیونکہ

$$ل \times ف \times ق \times \frac{1}{4} = (ل ف ق ۲) ف ق$$

مثال $\frac{1}{4} \times ۱۶ \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4}$ کا منطق جز ضربی $\frac{1}{4} \times ۳ \times \frac{1}{4} \times ۲ \times \frac{1}{4} \times ۵$ یعنی (۳۰) $\frac{1}{4}$ ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مجوزہ مقادیر اصم ف س، ق ع، ر ط ہیں

ان مقادیر کے مفرد جملہ صحیح کی صورت عامہ

$$م = ل ف س ق ع ر ط ہے (۱)$$

ظاہر ہے کہ (۱) کا منطق جز ضربی ف ا - س ل ق ا - ع ر ا - ط

$$\text{یعنی ف س ل ق ع ر ط ہے}$$

$$\text{مثال } م = \frac{1}{4} + ۲ \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4} + ۳ \times ۳۱ = \frac{9}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4} \times ۳۱ = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4} \times ۳ (۲ \times ۳ \times ۳۱) =$$

اسلئے منطق جز ضربی $\frac{1}{4} \times ۳ \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$ ہے

۹۷ - جملہ ثنائی اصم کا منطق جز ضربی دریافت کرو۔

(۱) جملہ ثنائی کی صورت عامہ جس میں صرف دو مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں ا ماق + ب ماق ہے کیونکہ اگر ف مربع کامل ہو تو اس خاص صورت میں اس کی شکل ع + ب ماق ہوگی جہاں ع اور ب دونوں مقادیر ناطقی ہیں

ظاہر ہے کہ جملہ ا ماق + ب ماق کا منطق جز ضربی

$$ا ماق - ب ماق ہے کیونکہ اگر م = ا ماق + ب ماق$$

$$t_0 m = (a m - b m) = (a - b)m$$

= ۱۰۰ - باقی جو ایک مقدار مناطق سے ہے۔

(۲) جملہ شنائی اہم کی صورت عامہ شہار + قہار ہے یا شہار۔ قہار

$$\overline{19}^{\wedge} + \overline{24}^{\wedge} = \overline{22}^{\wedge} + \overline{21}^{\wedge} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \text{ مثلاً}$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{2}}{7} - \frac{1}{7}$$

اس سے معلوم ہوا کہ جملہ ثنائی امم دل \pm رم \pm کی تحویل ہمیشہ صورت عامہ \pm ثنائی \pm قیاب کی طرف ہو سکتی ہے اس لئے ہم اس کا منطقی جزو ضروری دریافت کرتے ہیں۔

صورت اول - فرض کرو کہ مقدار اسم $\frac{1}{2}$ - قیاب دی ہوئی ہے اور اس کا منطق جز ضمنی مطلوب ہے -

فرض کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ = ما اور فرض کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

کا ذواضنات اقل ن ہے تب ظاہر ہے کہ لائن اور مائن دونوں مطلق میں
اب ن کی تمام قیمتوں کے لئے لائن - مائن جملہ لا - مائن پر پورا تقسیم
ہو سکتا ہے اور

$$(1 - \frac{1}{2}) + \dots + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1}} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{r-1}}$$

پس ظاہر ہے کہ منطق جز مندرجی مطلوب $لا-۱ + لا-۲$ م

$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ - اسے اور منطقی حاصل ضرب لائن - مان ہے

صورت دوم - فرض کرو کہ جملہ اصم معلوم فنکار + قلاب ہے
نیز لاواما دن کے معنی دی ہی ہیں جو اوپر بیان ہوئے تب

(۱) اگر ن جفت ہو تو لا + مایر لان - مان پورا تقسیم ہو سکتا ہے

يعني $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n = \frac{1}{4} (1 - (-1)^n)$

اب (۱) سے $\overline{ماف ق}$ کو دور کرنے کے لئے ہمیں اس کو
 $ن + ق - ر - ۲ ماف ق$ کے زوج سے ضرب دینی چاہیئے۔

$$\therefore (ن + ق - ر - ۲ ماف ق) (\overline{ماف ق} + \overline{ماق} - \overline{مار}) =$$

$$= (ن + ق - ر - ۲) \{ ۲ ماف ق \}$$

$$= ۲ ن + ۲ ق - ۲ ر - ۲ ماف ق - ۲ ماف ق - ۲ ماف ق - ۲ ماف ق$$

اسلئے منطق جز صربی مطلوب ہوا

$$(ن + ق - ر - ۲ ماف ق) (\overline{ماف ق} + \overline{ماق} - \overline{مار})$$

$$= (\overline{ماف} - \overline{ماق} + \overline{مار}) (\overline{ماف} - \overline{ماق} - \overline{مار}) (\overline{ماف} + \overline{ماق} - \overline{مار})$$

اگر ہم جلد (۲) کو بنور دیکھیں تو معلوم ہوگا کہ اس کے تینوں اجزائے

صربی جملہ $\overline{ماف} \pm \overline{ماق} \pm \overline{مار}$ کی علامات + اور - کو ہر ایک ترتیب میں

لینے سے حاصل ہوتے ہیں سوائے ترتیب + + + کے جو کہ دئے

ہوئے جملہ ثلاثی میں پہلے سے موجود ہے۔

مثال ۱۔ جلد ۲۱۰ - ۳۱۰ + ۴۱۰ کا منطق جز صربی

$$= (\overline{۲۱۰} - \overline{۳۱۰} - \overline{۴۱۰}) (\overline{۲۱۰} + \overline{۳۱۰} + \overline{۴۱۰}) (\overline{۲۱۰} + \overline{۳۱۰} - \overline{۴۱۰})$$

مثال ۲۔ ۱ - ۲۱۰ + ۳۱۰ - ۴۱۰ کا منطق جز صربی

$$= (\overline{۲۱۰} ۳ + \overline{۳۱۰} ۲ - ۱) (\overline{۲۱۰} ۳ + \overline{۳۱۰} ۲ - ۱) (\overline{۲۱۰} ۳ - \overline{۳۱۰} ۲ - ۱)$$

مثال ۳۔ ۱ - ۲۱۰ + ۳۱۰ - ۴۱۰ کا منطق جز صربی

$$= (\overline{۲۱۰} - \overline{۳۱۰} - \overline{۴۱۰} + ۱) (\overline{۲۱۰} + \overline{۳۱۰} + \overline{۴۱۰} + ۱) (\overline{۲۱۰} + \overline{۳۱۰} - \overline{۴۱۰} + ۱)$$

$$\times (\overline{۲۱۰} - \overline{۳۱۰} - \overline{۴۱۰} - ۱) (\overline{۲۱۰} + \overline{۳۱۰} - \overline{۴۱۰} - ۱) (\overline{۲۱۰} + \overline{۳۱۰} + \overline{۴۱۰} - ۱)$$

× (۱- ۲م + ۳م - ۴م) کسی مقدار ناطق کے جذر المربع کا کچھ حصہ ناطق اور کچھ حصہ اصم درجہ دوم نہیں ہو سکتا۔

$$\begin{aligned} \text{بشرط امکان فرض کرو کہ } ۱ + ۲م &= ۱م \\ \text{طرفین کا مربع لینے سے } ۱ + ۲م + ۴م &= ۱م \\ \text{جس سے } ۱م &= ۱م - ۲م - ۴م \end{aligned}$$

یعنی ایک مقدار اصم مقدار ناطق کے برابر ہوئی اور یہ باطل ہے
۱۰۰۔ اگر ۱ + ۲م = ۱م جہاں مقادیر ۱ اور ۲م ناطق ہیں اور ۲م اور ۱م غیر ناطق تو ثابت کرو کہ ۱ = ۱م اور ۲م = ۱م اگر ۱ اور ۲م برابر نہ ہوں تو فرض کرو کہ ۱ = ۱م + ۲م

$$\begin{aligned} \text{تب } ۱ + ۲م + ۴م &= ۱م + ۲م + ۴م \\ \text{اسلئے } ۱م &= ۱م + ۲م \end{aligned}$$

یعنی ۱م کا کچھ حصہ ناطق ہے اور کچھ حصہ غیر ناطق جو بموجب دفعہ سابق ناممکن ہے۔

$$\text{اسلئے } ۱ = ۱م \text{ اور } ۱م = ۱م \text{ یعنی } ۱ = ۱م$$

نوٹ۔ یاد رہے کہ نتیجہ مندرجہ بالا صرف اُس صورت میں صحیح ہو سکتا

ہے جبکہ مقادیر ۱م اور ۲م فی الحقیقت غیر ناطق ہوں مثلاً ربط ۱م + ۲م = ۱م

$$۱م + ۲م = ۱م \text{ سے ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ } ۱م = ۱م \text{ اور } ۲م = ۱م$$

۱۰۱۔ ۱ + ۲م کا جذر دریافت کرو جہاں ۲م مقدار اصم ہے

$$\text{فرض کرو کہ } ۱ + ۲م = ۱م + ۲م$$

$$\text{طرفین کا مربع لینے سے } ۱ + ۲م + ۴م = ۱م + ۲م + ۴م$$

اسلئے دفعہ گزشتہ کی مدد سے

$$(1) \quad \begin{cases} 1 = \sqrt{a + b} \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\text{اسلئے } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$\begin{cases} \text{پس ہمیں حاصل ہوا } 1 = \sqrt{a + b} \\ \text{اور } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} \end{cases}$$

جمع اور تفریق سے

$$\sqrt{a^2 + b^2} + 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} + 1 \quad \text{اور} \quad \sqrt{a^2 + b^2} - 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} + 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} + 1 \quad \text{اور} \quad \sqrt{a^2 + b^2} - 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1$$

نوٹ لا اور ا کی قیمتیں جو ہم نے اوپر معلوم کیں وہ اصلی جگہ سے بھی زیادہ پیچیدہ ہیں اس لئے اگر $\sqrt{a^2 + b^2}$ مربع کامل نہ ہو تو وہ غلطی میں اتنی کارآمد نہیں ہیں
نتیجہ صریح (۱) سے $1 - \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} - 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1$$

$$\text{پس معلوم ہوا کہ اگر } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} \sqrt{b} \text{ تو } \sqrt{a^2 + b^2} - 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1$$

$$\text{تو } \sqrt{a^2 + b^2} - 1 = \sqrt{a} \sqrt{b} - 1$$

$$\text{مثال } 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{b} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$\text{طرفین کا مربع لینے سے } 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{b} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$\text{اسلئے } 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{b} = 1 - \sqrt{a} \sqrt{b}$$

اعداد ۵ اور ۲ سے شرائط معادلات بالا پوری ہوتی ہیں اس لئے

$$\sqrt{2}m + \sqrt{5}m = \text{جذر مطلوب}$$

$$\text{مثال } ۲ - ۱۶ - ۵ = \sqrt{2}m \text{ کا جذر نکالو}$$

$$\text{فرض کرو کہ } \sqrt{2}m - ۱۶ = \sqrt{2}m - ۱۶$$

$$\text{تب } \sqrt{2}m - ۱۶ = \sqrt{2}m - ۱۶$$

$$\text{اس لئے } ۱۶ = ۱۶ \text{ اور } ۲ = ۲$$

$$\therefore (۱۶ - ۱۶) = (۱۶ - ۱۶) = ۰ \quad \text{اور } (۲ - ۲) = ۰$$

$$\text{اس لئے } ۱۶ = ۱۶ \text{ اور } ۲ = ۲$$

$$\text{ان مساواتوں کو حل کرنے سے } \frac{۲۵}{۴} = ۱۶ \text{ اور } \frac{۵}{۴} = ۲$$

$$\text{پس جذر مطلوب } \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} - \sqrt{\frac{۵}{۴}} =$$

$$\text{مثال } ۳ - \sqrt{۱۵} + \sqrt{۲۷} \text{ کا جذر نکالو}$$

$$(۱۵ + ۲۷) = ۴۲ = \sqrt{۱۵} + \sqrt{۲۷}$$

$$\text{اس لئے } \sqrt{۱۵} + \sqrt{۲۷} = \sqrt{۴۲}$$

مثال بالا کے موافق عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\sqrt{\frac{۵}{۴}} + \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \sqrt{\frac{۵}{۴}}$$

$$\text{اس لئے } \sqrt{\frac{۵}{۴}} + \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \sqrt{\frac{۵}{۴}}$$

۱۰۴ — بعض اوقات ہم ایسے جملہ اصم درجہ دوم کا جذر بھی نکال

سکتے ہیں جس میں دو سے زیادہ مقادیر اصم درجہ دوم شامل ہوں اس

کی توضیح عمل ذیل سے ہوگی۔

$$۱ = لا^۳ + ۳ لا^۲ ما + ۳ لا ما^۲ + ما^۳$$

$$۲ = ۱ - ما^۲ = لا^۳ - ۳ لا^۲ ما + ۳ لا ما^۲ - ما^۳$$

$$\text{یعنی } ۱ - ما^۲ = لا^۳ - ۳ لا^۲ ما + ۳ لا ما^۲ - ما^۳$$

اسی طرح مسئلہ ثنائی کی استقامت سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر

$$ن = لا^۳ + ما^۳ = لا^۳ + لا + ما^۳ + ما^۲ = لا^۳ + لا + ما^۲ - ما^۳ = لا^۳ + لا - ما^۲$$

ن کوئی صحیح عدد ہے

۳۰۱۔ ترکیب ذیل سے $۱ \pm ما^۲$ کی صورت کے جلوں کے
حذر الکعب بعض اوقات دریافت ہو سکتے ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ } ن = لا^۳ + ما^۲ = لا + ما^۲$$

$$ب = ن - لا = ما^۲ = لا - لا^۲$$

$$\text{اس لئے } ن - ب = لا^۲ = لا - ما^۲ \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{تیز بہ وجہ دفعہ گزشتہ } ۱ = لا^۳ + ۳ لا^۲ ما + ۳ لا ما^۲ + ما^۳ \dots\dots\dots (۲)$$

اب لا اور ما کی قیمتیں (۱) اور (۲) سے اس طرح دریافت کرتے ہیں

(۱) میں فرض کرو کہ $ن - ب = لا^۲ = ج$ تب ما کی قیمت (۲) میں رکھنے
سے ہمیں حاصل ہوگا

$$۱ = لا^۳ + ۳ لا^۲ ج + ج^۲$$

$$\text{یعنی } ۴ - لا^۳ = ج^۲ = ج$$

اگر مساوات میں بطور آزمائش مختلف قیمتیں رکھنے سے لا کی ایک
قیمت مل جائے تو ما کی قیمت مساوات $ما = لا - ج$ سے معلوم ہو سکتی
ہوگا۔ ہم یہاں جزر الکعب مطلوب کو $لا + ما$ کی شکل میں نہیں رکھتے

کیونکہ اگر اس کو تیسری قوت پر اٹھایا جائے تو

$$۹ + ۱۸ = ۲۷ = ۳ \times ۹ = ۳ \times ۳ \times ۳$$

اب چونکہ بائیں طرف کی ہر ایک رقم اہم ہے اس لئے ہم طرفین کے ناطق اور اہم حصوں کو آپس میں برابر نہیں رکھ سکتے۔

مثال ۱-۷۲-۳۲ کا جذر الکعب دریافت کرو

$$\text{فرض کرو کہ } \sqrt[3]{۷۲-۳۲} = ۵ - ۱$$

$$\text{تب } \sqrt[3]{۷۲-۳۲} = ۵ - ۱$$

دونوں کو ضرب دینے سے $\sqrt[3]{۷۲-۳۲} = ۵ - ۱$

$$۷۲ - ۳۲ = ۴۰ \dots \dots (۱)$$

$$\text{نیز } ۷۲ - ۳۲ = ۴۰ = ۳ \times ۱۵ + ۱۵ = ۳ \times ۱۵ + ۱۵$$

$$\text{جس سے معلوم ہوا کہ } ۷۲ - ۳۲ = ۴۰ \dots \dots (۲)$$

$$(۱) \text{ اور } (۲) \text{ سے } ۷۲ - ۳۲ = ۴۰ = ۳ \times ۱۵ + ۱۵$$

$$۷۲ - ۳۲ = ۴۰ \dots \dots$$

$$\text{جس سے } ۷۲ - ۳۲ = ۴۰ \dots \dots$$

$$\text{اور جذر الکعب } ۷۲ - ۳۲ = ۴۰$$

۱۰۵۔ جب کسی جملہ ثنائی میں جس کا جذر الکعب مطلوب ہو دو

مقادیر اہم درجہ دوم شامل ہوں تو ہمیں اس طرح عمل کرنا چاہیئے

مثال ۱-۳۲۹ + ۲۱۱ کا جذر الکعب دریافت کرو۔

$$\sqrt[3]{۳۲۹ + ۲۱۱} = \sqrt[3]{۳۲۹ + ۲۱۱} = \sqrt[3]{۳۲۹ + ۲۱۱}$$

سوافق مثال سابق حل کرنے سے حاصل ہوگا ۱۸

$$\sqrt{\frac{2}{3}m} + 1 = \sqrt{\frac{2}{3}m} + \frac{11}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}m} + \frac{14}{3}$$

∴ جذر الکعب مطلوب = $\sqrt{\frac{2}{3}m} + 1$ $\sqrt{\frac{2}{3}m} + 3 = (\sqrt{\frac{2}{3}m} + 1) + 2$
 ۱۰۶۔ اب ہم مقادیر اہم کی چند مشکل مثالیں حل کرتے ہیں۔
 مثال ۱۔ $\sqrt[3]{m} - 9\sqrt[3]{m} + 1$ کے نسب نمکونہ ناطق بناؤ۔

$$\begin{aligned} \text{جملہ} &= \frac{m}{1 + \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}} = \frac{(1 + \sqrt[3]{m})^2}{(1 + \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m})(1 + \sqrt[3]{m})} \\ &= \frac{(1 + \sqrt[3]{m})^2}{1 + \sqrt[3]{m}} \end{aligned}$$

مثال ۲۔ $\sqrt[3]{m} - 2 + (1 - \sqrt[3]{m}) + \sqrt[3]{m} - 2 + \sqrt[3]{m} - 2$ کا جذر نکالو

$$\begin{aligned} \text{جملہ} &= \frac{1}{4} \{ \sqrt[3]{m} - 2 + (1 - \sqrt[3]{m}) + \sqrt[3]{m} - 2 + \sqrt[3]{m} - 2 \} \\ &= \frac{1}{4} \{ (\sqrt[3]{m} - 2) + (1 - \sqrt[3]{m}) + (\sqrt[3]{m} - 2) \} \end{aligned}$$

ظاہر ہے کہ جذر مطلوب = $\frac{1}{4} \sqrt[3]{m} = \sqrt[3]{\frac{m}{64}}$

مثال ۳۔ معلوم ہے $\sqrt[3]{m} = 5$ $2523406 = \sqrt[3]{m}$

$$\frac{\sqrt[3]{m} - 3}{\sqrt[3]{m} - 4 + 2} \text{ کی قیمت دریافت کرو}$$

نثار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو $\sqrt[3]{m}$ سے ضرب دو تو

$$\text{جملہ} = \frac{\sqrt[3]{m} - 3}{\sqrt[3]{m} - 4 + 2} = \frac{1 - \sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m} - 3 + 2} = \frac{\sqrt[3]{m} - 4}{\sqrt[3]{m} - 1} = \frac{5 - 4}{5 - 1} = \frac{1}{4}$$

مثال ۳۔ مساوات $m(2+l) + m(13-l) = 8$ کو حل کرو

عمل نقل سے $m(2+l) - 8 = m(13-l)$

طرفین کا مربع لینے سے $2+l = 13-l$ $14 - 13 = 1$ $14 - 13 = 1$

جس سے معلوم ہوا کہ $14 = 13 - 1$ یعنی $14 = 13 - 1$ $3 = 13 - 1$ $23 = 13 - 1$ $9 = 13 - 1$ $23 = 13 - 1$

مثال ۵۔ اگر $3m + 2q = 1$ اور $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$

تو $3m + 2q = 1$ کی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ $1 = 3m + 2q$ اور $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$

اور $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$

$(3m + 2q) + (3m + 2q) = 1 + 1$ $6m + 4q = 2$ $3m + 2q = 1$

$3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$

اس لئے $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$ $3m + 2q = 1$

مثال ۶۔ اگر $(a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$ $(a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$

$(a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$ $(a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$

ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک جملہ $\pm ab$ $\pm ab$ $\pm ab$ $\pm ab$

فرض کرو کہ ہر ایک جملہ $= k$ $= k$ $= k$ $= k$

تب $k = (a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$ $(a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$

اور نیز $k = (a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$ $(a + 2b)(a + 2c) = (a + 2b)(a + 2c)$

اسلئے کہ $\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \} \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \} \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \}$

$$= \text{ب}^2 \text{ ج} \times \text{ج}^2 \times \text{ا}^2 = \text{ا}^2 \text{ ب}^2 \text{ ج}^3$$

اسلئے کہ $\pm \text{ا}^2 \text{ ب}^2 \text{ ج} =$ یعنی ہر ایک جملہ معلومہ $= \pm \text{ا}^2 \text{ ب}^2 \text{ ج}$

مثال ۷۔ اگر $\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \} \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \} \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \} = \text{ا}^2$
تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2} = 1$
عمل نقل سے

$$\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \} \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \} \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \} = \text{ا}^2$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \}^2 = \text{ا}^4$$

یا $\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \}^2 = \text{ا}^4$
اسلئے عمل نقل سے

$$\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \}^2 = \text{ا}^4$$

مشترک جز ضربی ا^2 کو طرفین سے خارج کرو اور طرفین کا مربع لے کر تو حاصل ہوگا

$$\{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \}^2 = \text{ا}^4$$

$$\text{یا } \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2 \text{ ج}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ج}^2 \text{ و}) \}^2 \{ \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ی}^2 - \text{ب}^2) \}^2 = \text{ا}^4$$

$$\text{یا } \text{ا}^2 \text{ ب}^2 \text{ ج}^2 = \text{ا}^4$$

طرفین کو $\text{ا}^2 \text{ ب}^2 \text{ ج}^2$ پر تقسیم کرنے سے $1 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2}$

امثلہ نمبری ۱۰

ذیل کی مثالوں میں سب غاؤں کو ناطق بناؤ۔

$$۱ - \frac{۱}{۱۲ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۲}$$

$$۲ - \frac{۱ + ۱۲}{۱ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۲}$$

$$۳ - \frac{(۱۲ + ۱۲)(۱۲ + ۱۲)}{۱۲ + ۱۲ + ۱۲}$$

ذیل کے جملوں کا منطق جز ضروری دریافت کرو۔

$$۴ - ۱۲ - ۱۲ - ۱۲ - ۱۲$$

$$۵ - ۱۲ + ۱۲$$

$$۶ - ۱۲ - ۱۲$$

$$۷ - \frac{۱۲ - ۱۲}{۱۲ + ۱۲}$$

$$۸ - \frac{۱۲}{۱۲ - ۱۲}$$

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو

$$۹ - ۱۲ - ۱۲ - ۱۲ - ۱۲$$

$$۱۳ - ۳۲ ۲ + ۲ - ۱۴ - ۱۶ + ۱۶$$

$$۱۵ - ۱۵۲ + ۲۴۲ - ۱۶ - ۹ + ۴۲$$

$$۱۷ - ۱ + ۳ ب + ۲ + ۲ - ۱۲ - ۳۲ ب - ۳۲ اب$$

جملات ذیل کے جذرا لکھ دریافت کرو۔

$$۱۸ - ۲۲ ۵ + ۷ - ۱۹ - ۱۶ + ۸$$

$$۲۰ - ۳۲ ۹ - ۲۲ ۱۱ - ۳۱ - ۹۹ - ۲۲ ۷۰$$

$$۲۲ - ۳۲ ۱۳۵ - ۳۲ ۸۷ - ۳۳ ۱ + (۱ - ۲) - \frac{1}{2} \text{ کا جذر نکالو}$$

$$۳۳ - ۱ + ۲ + (۱ + ۲ + ۳) - \frac{1}{2} \text{ کا جذر نکالو}$$

$$۲۵ - \text{اگر } \frac{1}{3۲-۲} = \text{اور } \frac{1}{3۲+۲} = \text{ب}$$

تو $۷ + ۱۱ اب - ۷ ب$ کی قیمت دریافت کرو

$$۲۶ - \text{اگر } \frac{۲۲-۳۲}{۲۲+۳۲} = \text{اور } \frac{۲۲+۳۲}{۲۲-۳۲} = \text{ا}$$

تو $۳ لا - ۵ لا + ۳ ما$ کی قیمت دریافت کرو۔

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$۲۷ - \frac{۳۲ ۲ + ۶}{۳۲ ۱۹ - ۳۳}$$

$$۲۸ - \frac{1}{2} - (۳۲ ۴ + ۷) - \frac{1}{2} (۳۲ ۱۰ - ۲۸)$$

$$۲۹ - \text{اگر } ۳۲ = ۳۲۰.۵۰۸ \text{ تو } \frac{1}{3۲+۲} \text{ کی قیمت دریافت کرو}$$

$$۳۰ - \text{اگر } ۵ = ۲۳۶.۷ \text{ تو}$$

۳۱۔ اگر $۲ لا = لا + لا + \frac{1}{لا}$ تو $\frac{۱ - لا}{۱ - لا - لا}$ کی قیمت دریافت کرو
 مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$۳۲۔ لا(لا + ۱۱) - لا = ۱$$

$$۳۳۔ لا(لا + ۳) + لا(۵ - لا) = ۹$$

$$۳۴۔ لا(لا - ۱) = ب(لا - ۱)$$

$$۳۵۔ لا(لا + ۱) + لا(لا + ب) = ج$$

$$۳۶۔ ثابت کرو کہ $لا(لا + ۲) - لا(لا - ۲) = ۱$$$



باب ہفتم

مقادیر خیالی

۱۰۷۔ فرض کرو کہ کسی مقدار منفی -۱ کا جذر نکالنا مطلوب ہے۔ اس میں ایک نئی شکل ہے۔ ∞ سے $\infty +$ تک تمام مقادیر جبریہ کے مربعے مثبت ہوتے ہیں۔ اس لئے ایسی کوئی مقدار فی الحال ہم کو معلوم نہیں جس کا مربع -۱ کے برابر ہو۔ اب اگر ہم اپنے اعمال جبریہ کی تعلیم کو بدستور قائم رکھنا چاہتے ہیں۔ تو مقادیر جبریہ کے میدان کو وسیع کئے بغیر چارہ نہیں۔ ہم اس جگہ ایک نئی خیالی اکائی یا خیالی مقدار کو اپنی تحقیقات جبریہ میں شامل کرتے ہیں۔ اس خیالی مقدار کو ہم ہمیشہ حرف خ یا χ سے تعبیر کریں گے اور اس کی تعریف ہوگی۔

$$\chi^2 = -1 \quad \chi = \sqrt{-1} \quad -1 = 1 - 1$$

ظاہر ہے کہ خ کسی مقدار حقیقی کے برابر نہیں ہو سکتی کیونکہ تمام حقیقی مقادیر کے مربعے مثبت ہوتے ہیں خ کے تمام خواص ہم اس کی تعریف سے اخذ کریں گے

چونکہ خ مقدار جبریہ ہے اور قوانین جبریہ اس پر چل سکتے ہیں ہم اس کے اضعاف حقیقی ی خ دی خ لے سکتے ہیں جہاں

می اور می مثبت یا منفی مقدار میں ہیں۔

اب ضروری ہے کہ $xy = x$

اور $Y(X+Y) = (X+Y)X = YX + XY$ وغیرہ

اگر ہم x کے تمام اضعاف حقیقی $- \infty$ سے $+\infty$ تک لیں تو ہمیں خالص مقادیر خیالی کا سلسلہ ذیل حاصل ہوگا۔

اس سلسلے کے مقابل مقادیر حقیقی کا سلسلہ یہ ہے -

$$(r) \infty + \dots + 1 + \dots + 1 - \dots - \infty -$$

سلسلہ (۱) کی کوئی مقدار سوائے $(0 \times x)$ کے سلسلہ (۲) کی کسی مقدار کے برابر نہیں ہو سکتی کیونکہ x کے کسی ضعف حقیقی مثلاً y کا مربع $= y^2 = (1-y)^2 = y^2 - 2y + 1$ جو ایک منفی مقدار ہے۔

اس لئے معلوم ہوا کہ کوئی خالص مقدار خیالی سوائے ∞ کے کسی مقدار حقیقی کے برابر نہیں ہو سکتی۔

چونکہ $x \cdot x = x^2$ اور $(-x) \cdot (-x) = x^2$ لہذا اس لئے

معلوم ہوا کہ صفحہ ہی ہر دو سلسلوں کی درمیانی اور مشترک رقم ہے۔

۱۰۸ — بموجب تعریف $1 - \mu = 1 - \mu \times 1 - \mu = 1 - \mu$

طرفین کو ا میں ضرب دینے سے $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ (۱-)

یعنی $(\overline{A} \times B) \cap A = \emptyset$

$$1-1 = 1-1 \times 1-1!$$

معلوم ہوا کہ حاصل ضرب $a \times b = a - b$ کو مقدار خیالی $a - b$ کے برابر خیال کرنا چاہیئے۔

۱۰۹۔ عام طور پر کسی جملہ کی خیالی خصلت کو ظاہر کرنے کے لئے بہتر ہوگا کہ ہم علامت خیالی $a - b$ کو واضح طور پر علیحدہ کر کے لکھیں۔

$$\text{مثلاً } a - b = a - x b = a - b x$$

$$a - b x = a - (x b) = a - b x$$

ہم آئندہ ہر ایک علامت جذر کے پہلے علامت مثبت کو متصرف خیال کریں گے مگر مقدار خیالی کی بحث میں ایک بات قابل غور ہے۔

$$\text{چونکہ } (-a) \times (-b) = ab$$

$$\text{جذر لینے سے } a - b = a - (-b) = a + b$$

بظاہر اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $a - b$ اور $a + b$ کا حاصل ضرب دریافت کرنے میں ہم ab کے ماقبل کوئی سی علامت مثبت یا منفی لے سکتے ہیں مگر یہ درست نہیں کیونکہ

$$a - b \times a - b = a - b \times a + b = a - b \times a + b$$

$$= a - b \times (a - b) = a - b \times a + b$$

$$a - b \times a - b = a - b \times a + b$$

۱۱۰۔ اگر کسی حقیقی مقدار a میں کسی خالص مقدار خیالی $a - b$ کو جمع کر دیا جائے تو جملہ $a + b$ حاصل ہوگا اسے ہم عدد خیالی یا جملہ خیالی کے نام سے موسوم کریں گے۔ یاد رہے کہ تمام خیالی جملے $a + b$ کی صورت میں لائے جاسکتے ہیں اس جملے میں

۱ اور ب دونوں حقیقی مقادیریں ہیں۔ مگر یہ ضروری نہیں کہ مطلق بھی ہوں۔

۱۱۱۔ اگر $۱ + ب = ۱ - ۱ = ۰$ تو $۱ = ۰$ اور $ب = ۰$ ۔

کیونکہ اگر $۱ + ب = ۱ - ۱ = ۰$ ۔

تو $ب = ۱ - ۱ = ۰$ ۔

طرفین کا مربع لینے سے $- ب = ۲ = ۱$ ۔

اسلئے $۱ + ب = ۲ = ۰$ ۔

اب ۱ اور $ب$ دونوں مثبت ہیں انکا حاصل جمع صفر نہیں ہو سکتا جب تک ان میں سے ہر ایک صفر نہ ہو۔

پس معلوم ہوا کہ $۱ = ۰$ اور $ب = ۰$ ۔

۱۱۲۔ اگر $۱ + ب = ۱ - ۱ = ۰$ ج $+ ۱ = ۱ - ۱ = ۰$ ۔

تو $۱ = ۰$ ج اور $ب = ۰$ ۔

عل نقل سے $- ۱ = ج + (ب - ۱) = ۱ - ۱ = ۰$ ۔

بوجب دفعہ آخر $- ۱ = ج = ۰$ یعنی $۱ = ج$ ۔

اور $ب = ۰ = ج$ یعنی $ب = ج$ ۔

پس معلوم ہوا کہ دو خیالی جملوں کے باہم مساوی ہونے کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ ان کے حقیقی حصے آپس میں برابر ہوں اور ان کے خیالی حصے آپس میں۔

۱۱۳۔ ہمیں ابتدائی جبر و مقابلہ سے معلوم ہے کہ اگر مقادیر حقیقی

پر اعمال جبر یہ سے کام لیں بشرطیکہ وہ اعمال مطلق ہوں یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، تو مقادیر حقیقی اور صرف مقادیر حقیقی پیدا ہوتی

ہیں۔ برعکس اس کے اگر ہم عمل اہم یعنی استخراج جذر کو کام میں لائیں تو اپنی تقسیم جبریہ کو قائم رکھنے کی خاطر ضروری ہے کہ ہم ایک خیالی مقدار x کو احاطہ ریاضی میں داخل کریں۔ اب ایک قدرتی سوال پیدا ہوتا ہے کہ ”اگر ہم مقدار حقیقی یا خیالی کی صورت میں نامق یا غیر نامق اعمال جبریہ کو استعمال میں لائیں تو کیا ہم ہمیشہ اسی قسم کی مقادیر حقیقی یا خیالی جن کی ہم اوپر تعریف کر چکے ہیں پیدا کریں گے یا کسی نہ کسی مقام پر ہمیں ایک نئی قسم کی خیالی اور سوہمی مقدار شامل کرنی پڑے گی؟ اس سوال کا جواب یہ ہے کہ جہاں تک اعمال جبریہ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، اور نزول پر موقوف ہے ہمیں مقادیر جبریہ کے تصور کی توسیع کی ضرورت نہیں دراصل اس باب کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ واضح طور پر یہ ثابت ہو جائے کہ مقادیر خیالی پر اعمال جبریہ کے اثر سے صرف مقادیر خیالی پیدا ہوتی ہیں۔

۱۱۴۔ متعدد اعداد خیالی کا حاصل جمع اور حاصل ضرب اور دو اعداد خیالی کا خارج قسمت عدد خیالی کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے فرض کرو کہ کوئی سی تعداد مقادیر مثلاً تین اعداد خیالی $a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-2}$ و $d + e\sqrt{-1} + f\sqrt{-2}$ معلوم ہیں۔

تب بموجب قوانین جبریہ $(a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-2}) + (d + e\sqrt{-1} + f\sqrt{-2}) = (a + d) + (b + e)\sqrt{-1} + (c + f)\sqrt{-2}$

لیکن $a + d$ ، $b + e$ اور $c + f$ ہمیں مقادیر حقیقی ہیں۔ کیونکہ a ، b ، c ، d ، e ، f حقیقی ہیں۔

اسلئے $(a + d) + (b + e)\sqrt{-1} + (c + f)\sqrt{-2}$ عدد خیالی کی

صورت عامہ ہے۔

اب دو اعداد خیالی $(1 + \sqrt{-1}) + (1 + \sqrt{-1}) + (1 + \sqrt{-1}) + (1 + \sqrt{-1})$ کے حاصل ضرب پر غور کرو۔

$$(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1}) = 1 + \sqrt{-1} + \sqrt{-1} + (-1) = 2\sqrt{-1}$$

بوجب تعریف $(1 + \sqrt{-1})^2 = 2\sqrt{-1}$ اسلئے

$(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1}) = (1 + \sqrt{-1}) + (1 + \sqrt{-1}) + (1 + \sqrt{-1}) + (1 + \sqrt{-1})$
جس سے معلوم ہوا کہ دو خیالی عددوں کا حاصل ضرب عدد خیالی کی صورت عامہ میں نکلیا جاسکتا ہے اگر اسی مسئلہ کو تین خیالی عددوں کے حاصل ضرب کے لئے ثابت کرنا منظور ہو تو فرض کرو کہ

ض = حاصل ضرب مطلوب

$$(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1}) =$$

$$(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1}) =$$

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ وہ جملہ جو خطوط وحدانی { } کے اندر ہے ایک عدد خیالی ہے اسلئے ض دو اعداد خیالی کا حاصل ضرب ہوا اور جیسا ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں یہ خود ایک خیالی عدد ہے اسلئے ض عدد خیالی کی صورت عامہ میں رکھا جاسکتا ہے۔

اب رہا دو اعداد خیالی کا خارج قسمت۔

$$\frac{(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})}{(1 + \sqrt{-1})} =$$

$$\frac{(1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})}{(1 + \sqrt{-1})} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 1 - 1 = 0$$

ثابت ہوا کہ دو اعداد خیالی کا خارج قسمت ایک خیالی عدد کی صورت میں تحویل ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ چونکہ ہر ایک ناطق جملے کی ترکیب میں صرف افعال جبریدہ جمع، تفریق، ضرب، تقسیم ہی شامل ہوتے ہیں اسلئے اس دفعہ کے نتائج سے ثابت ہوتا ہے کہ ایک یا ایک سے زیادہ اعداد خیالی کا ناطق جملہ عدد خیالی کی عام صورت میں تحویل ہو سکتا ہے

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ج (لا + خ ما) کوئی جملہ ناطقہ لا + خ ما کا ہو جس کے سب مکر حقیقی ہوں اور جس میں $x = 1 - 1$ اور

$$\text{اگر ج (لا + خ ما) = ک + خ ق}$$

$$\text{تو ج (لا - خ ما) = ک - خ ق}$$

ظاہر ہے کہ ک میں ما کی جفت قوا اور ق میں صرف طاق قوا شامل ہونگی۔ اسلئے اگر ہم ما کی علامت بدل دیں تو اس کا اثر صرف ق تک محدود ہوگا۔

نتیجہ صریح ۳۔ اور بالعموم اگر ج (لا + خ ما + لا + خ ما + لا + خ ما + لا + خ ما) ایک ایسا ناطق جملہ ن اعداد خیالی کا ہو جس میں سب مقادیر حقیقی ہوں اور اگر ج (لا + خ ما + لا + خ ما + لا + خ ما + لا + خ ما) = ک + خ ق

$$\text{تو ج (لا - خ ما + لا - خ ما + لا - خ ما + لا - خ ما) = ک - خ ق}$$

نتیجہ صریح ۴۔ اگر جملہ صحیح ج (ی) کے سب مکر حقیقی ہوں۔

اور ج (ی) صفر ہو جب ی = لا + خ م توج (ی) صفر ہو گا جب
ی = لا - خ م

کیونکہ بموجب نتیجہ صریح ا ج (لا + خ م) = ک + خ ق جہاں
ک اور ق حقیقی ہیں پس اگر ج (لا + خ م) = .

تو ک + ق خ = . یعنی ک = . اور ق = .

∴ ج (لا - خ م) = ک - خ ق = . - . × خ م = .

مثال ۱- $(1-12+3)3 - (1-12+2)2 - (1-12+1)1$

$$= 1-12+9 = 1-12+4+2-1-12+8+4+11 = 1-12+20$$

مثال ۲- $(1-12+3)(1-12+2)(1-12+1)$

$$= (1-12+3)(1-12+2)(1-12+1) = 1-12+9+4+6-1-12+8+4+11 = 1-12+26+45$$

$$= (1-12+3)(1-12+2)(1-12+1) = 1-12+26+45 = 1-12+71$$

مثال ۳- $(ب + س - خ) (ب + س - خ) (ب + س - خ)$

$$= \{ \pi (ب + س) - \chi \} \{ \chi (ب + س) - \pi \} =$$

$$+ \chi \{ \chi (ب + س) - \pi \} - \pi \{ \pi (ب + س) - \chi \} =$$

$$\text{جہاں } \pi (ب + س) = (ب + س) (س + ب) = (س + ب) (ب + س)$$

$$\text{اور } \chi (ب + س) = (ب + س) (س + ب) = (س + ب) (ب + س)$$

$$\text{بلکہ } 2 \text{ اوب س } + \chi \{ \chi (ب + س) - \pi \} - \pi \{ \pi (ب + س) - \chi \} = 2 \text{ اوب س } - (س + ب) (س + ب)$$

$$= 2 \text{ اوب س } - \chi \{ \chi (ب + س) + \pi (س + ب) + \pi (س + ب) + \chi (ب + س) \}$$

مثال ۴- $\frac{1-12+3}{1-12+2} = \frac{(1-12+3)(1-12+2)}{1-12+2}$

$$= \frac{1-12+3}{1-12+2} = \frac{1-12+3}{1-12+2}$$

$$- = \frac{9}{13} + \frac{19}{13} - 1$$

$$\text{مثال ۵۔ اگر ج (ی) = } \frac{1 + \text{ی} - \text{ی}^2}{1 + \text{ی} + \text{ی}^2}$$

$$\text{تو ج (ج (۱-۲+۳)) = } \frac{1 + (1-2+3) - (1-2+3)^2}{1 + (1-2+3) + (1-2+3)^2}$$

$$= \frac{1 + 1 - 2 - 2 - 1 + 5}{1 + 1 - 2 + 2 + 1 - 2 + 5}$$

$$= \frac{(1-2+3)(1-2+3)}{1-2+3} = \frac{1-2+3}{1-2+3}$$

$$= \frac{3}{229} \{ 1-2+3 - 2+3 - 3+4 - 4+5 + 5-6 + 6-7 + 7-8 + 8-9 + 9-10 + 10-11 + 11-12 + 12-13 + 13-14 + 14-15 + 15-16 + 16-17 + 17-18 + 18-19 + 19-20 + 20-21 + 21-22 + 22-23 + 23-24 + 24-25 + 25-26 + 26-27 + 27-28 + 28-29 + 29-30 \}$$

$$= \frac{134}{229} + \frac{42}{229} =$$

اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ

$$\text{ج (۲-۳+۴) = } \frac{134}{229} - \frac{42}{229} = \frac{92}{229}$$

طالب علم کو جاسیے کہ موافق علی بالا اسکی تصدیق کرے

۱۱۵۔ تعریف دو خیالی اعداد جو صرت اپنے خیالی حصوں میں مختلف علامت ہوں ایک دوسرے کے مزدوج کہلاتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا زوج کہتے ہیں۔

مثلاً ۳-۲-۱ اور ۳+۲+۱ ایک دوسرے کے مزدوج ہیں ایسے ہی ۴-۱ اور ۴+۱ اور بالعموم ۱-ب اور ۱+ب اور ۱-ب اور ۱+ب ایک دوسرے کے مزدوج ہیں۔

اگر بعد نا طے ج کے سب مکرر حقیقی ہوں تو

ج (لا + خ با و لا + خ با و لان + خ مان)
اور ج (لا - خ با و لا - خ با و لان - خ مان)
جن میں مقدار مجہول ایک دوسری کی مزدوج ہیں دو مزدوج
اعداد خیالی کہلائیں گے۔

۱۱۶۔ دو مزدوج خیالی عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب
مقادیر حقیقی ہوتے ہیں۔

۱ + ۱ = ۲ اور ۱ - ۱ = ۰
اور (۱ + ۱ = ۲) اور (۱ - ۱ = ۰) اور (۱ - ۱ = ۰) اور (۱ - ۱ = ۰)
برعکس اس کے اگر دو اعداد خیالی کا حاصل جمع اور حاصل ضرب دونوں
حقیقی ہوں تو وہ اعداد حقیقی ہونگے یا ایک دوسرے کے مزدوج۔
فرض کرو کہ (۱ + ۱ = ۲) اور (۱ - ۱ = ۰) ج (۱)
(۱ + ۱ = ۲) اور (۱ - ۱ = ۰) ض (۲)

جہاں ج اور ض دونوں مقدار حقیقی ہیں۔
ہم (۱) اور (۲) کو بصورت ذیل لکھ سکتے ہیں۔

(۱) ج = (۱ + ۱) + (۱ - ۱) = ۲
(۲) ض = (۱ - ۱) + (۱ + ۱) = ۲
(۱) اور (۲) سے معلوم ہوا کہ

$$(۳) ج = ۱ + ۱$$

$$(۴) ۰ = ۱ - ۱$$

$$(۵) ض = ۱ - ۱$$

$$(۶) ۰ = ۱ + ۱$$

اب (۴) سے ب = - ب اور (۶) میں ب کی قیمت رکھنے سے
معلوم ہوا کہ

$$ب (۱ - ۱) = ۰ \text{ اسلئے } ب = ۰ \text{ یا } ۱ - ۱ = ۰$$

اگر ب = ۰ تو ب = - ب = ۰ اور دونوں اعداد حقیقی ہیں۔

اگر ب = ۱ = - ۱ تو ۱ = ۱ اور چونکہ ب = - ب

اسلئے ۱ + ب = ۱ - ۱ = ۰ ب = ۱ - ۱ یعنی اعداد ایک دوسرے کے

مزدوج ہیں مساوات (۳) اور (۵) سے ہمیں ۱ اور ب اور اسلئے

۱ اور ب کی قیمتیں ج اور ض کی قوم میں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$۱ = ۱ = ۱ \text{ اور } ب = - ب = ۱ - ۱ = ۰$$

۱۱۷۔ تعریف ۱ + ب کے جذر کی مثبت قیمت کو ہر دو مزدوج خیالی اعداد

۱ + ب اور ۱ - ب کا مقیاس کہتے ہیں ہم ۱ + ب اور ۱ - ب کے مقیاس

کو مت (۱ + ب) سے تعبیر کریں گے۔

$$\therefore \text{بوجب تعریف مت } (۱ + ب) = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

$$\text{مثال ۱۔ مت } (-۳ + ۴ - ۱) = ۱ + (-۳) + ۲(۴) = ۵$$

$$\text{مثال ۲۔ مت } (-۳ - ۴ + ۱) = ۱ + (-۳) + ۲(۴) = ۵$$

$$\text{مثال ۳۔ مت } (۱ + ۱ - ۱) = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

نوٹ۔ اگر ب = ۰ یعنی اگر عدد خیالی صفر حقیقی مقدار ہو تو اس کا

مقیاس = ۱ + ۱ + ۱ جو ۱ کی حسابی قیمت ہے۔

$$\text{مثلاً مت } (-۳) = ۱ + (-۳) + ۲ = ۰$$

۱۱۸۔ دو خیالی جملوں یا عددوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اُن

جملوں کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔
 فرض کرو کہ $a + b$ اور $c + d$ وہ جملے ہیں
 ان کا حاصل ضرب = $(a + b)(c + d)$ ایک
 خیالی جملہ ہے۔

$$\text{اور اس کا مقیاس} = (a + b)(c + d)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd$$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$= (a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2) \text{ جس سے ثابت ہوا}$$

۱۱۹۔ اگر کوئی عدد خیالی معدوم ہو جائے تو اس کا مقیاس بھی معدوم
 ہو جائیگا اور برعکس اس کے اگر کسی عدد خیالی کا مقیاس معدوم ہو جائے تو وہ
 عدد بھی معدوم ہو جائے گا

$$\therefore \text{اگر } a + b = 0 \text{ تو } c + d = 0 \text{ اور } b = 0$$

$$\text{اس لئے } a^2 + b^2 = 0$$

$$\text{نیز اگر } a^2 + b^2 = 0 \text{ تو } c + d = 0 \text{ اور } b = 0$$

a^2 اور b^2 ہر دو مثبت مقادیر ہیں۔ ان کا مجموعہ اسی صورت
 میں صفر ہو سکتا ہے جبکہ ان میں سے ہر ایک مقدار صفر ہو، یعنی
 $a = 0$ اور $b = 0$

اگر دو اعداد خیالی برابر ہوں تو ان کے مقیاس برابر ہونگے مگر
 اس کا عکس صحیح نہیں۔

فرض کرو کہ جملہ ج (لا + خ ما، لا + خ ما، لان + خ مان) کی بجائے جملہ (لا + خ ما) (لا + خ ما) (لان + خ مان) ہے تب موافق مسئلہ (۲) مذکورہ بالا متی { (لا + خ ما) (لا + خ مان) (لان + خ مان) }

$$= \left[(لا + خ ما) \times (لا + خ ما) \times \dots \times (لان + خ مان) \times (لا - خ ما) (لا - خ مان) \dots (لان - خ مان) \right]$$

$$= (لا + ما) (لا + ما) \dots (لا + ما) \dots (لان + مان) \dots$$

$$= (+ ما لا + ما) (+ ما لا + ما) \dots (+ ما لان + مان) \dots$$

= متی (لا + خ ما) × متی (لا + خ ما) × × متی (لان + خ مان) یعنی ن اعداد خیالی کے حاصل ضرب کا مقیاس اُن کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

اب فرض کرو کہ $\frac{لا + خ ما}{لا + خ ما}$ کا مقیاس مطلوب ہے مسئلہ (۲) کی استغاثت سے

$$\text{متی} \left(\frac{لا + خ ما}{لا + خ ما} \right) = \left[\left(\frac{لا + خ ما}{لا + خ ما} \right) \times \left(\frac{لا + خ ما}{لا + خ ما} \right) \right]$$

$$= \frac{\frac{لا + ما}{لا + ما}}{\frac{لا + ما}{لا + ما}}$$

$$= \frac{\text{متی} (لا + خ ما)}{\text{متی} (لا + خ ما)}$$

یعنی دو اعداد خیالی کے خارج قسمت کا مقیاس اُن کے مقیاسوں کے خارج قسمت کے برابر ہوتا ہے۔

مثال ۱ — $(1-m, 3+2)(1-m, 2-3)(1-m, 4-1)$ کا مقیاس دریافت کرو

$$\text{مقیاس} = \{(1-m, 3+2)(1-m, 2-3)(1-m, 4-1)\}$$

$$= (1-m, 3+2) \times (1-m, 2-3) \times (1-m, 4-1)$$

$$= 13m, 24 = 52m \times 13m \times 13m =$$

مثال ۲ — $\frac{(1-m, 5m+3m)(1-m, 3m+2m)}{1-m, 5m+2m}$ کا مقیاس دریافت کرو

$$\text{مقیاس} = \left\{ \frac{(1-m, 5m+3m)(1-m, 3m+2m)}{(1-m, 5m+2m)} \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{(1-m, 5m-3m)(1-m, 3m-2m)}{(1-m, 5m-2m)} \right\}$$

$$\frac{m}{2} = \frac{(5+3)(3+2)}{5+2} =$$

مثال ۳ — $\{(1-m, (ج-ب)+(ب+ج))\} \{(1-m, (ج-ب)+(ب+ج))\}$

$$\times \{(1-m, (ب-ا)+(ا+ب))\}$$

$$\text{مقیاس} = \{^2(ج-ب)+^2(ب+ج)\} \{^2(ج-ب)+^2(ب+ج)\}$$

$$\times \{^2(ب-ا)+^2(ا+ب)\}$$

$$= \{^2(ب+ا)(^2ج+^2ب)(^2ج+^2ا)\}$$

اعداد خیالی پر اعمال اصم کا اثر

۱۲۱۔ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر اعداد خیالی پر ناطق عمل کئے جائیں تو صرف اعداد خیالی پیدا ہوتے ہیں۔

اب اگر ہم ثابت کر سکیں کہ کسی عدد خیالی کے ن مرتبہ کے جذر کی قیمت یا قیمتیں صرف عدد خیالی یا اعداد خیالی ہوتے ہیں تو ہم نے از بس یہ مسئلہ قائم کر دیا کہ اعداد خیالی پر ہر قسم کے اعمال جبریہ ناطق اور اصم کے استعمال سے سوائے اعداد خیالی کے اور کچھ نہیں پیدا ہو سکتا۔

اس نتیجہ پر پہنچنے کا بہترین طریقہ ڈیماورے صاحب کا سلسلہ ہے مگر اس کی مدد کے بغیر ہم مقادیر خیالی کا جذر نکالتے ہیں جو مسئلہ مذکورہ کی ایک خاص صورت ہے۔

۱ + ب م - ۱ کا جذر نکالو۔

فرض کرو کہ ۱ + ب م - ۱ = لا + ما م - ۱ جہاں لا اور ما دونوں مقادیر حقیقی ہیں۔

طرفین کا مربع لینے سے ۱ + ب م - ۱ = لا - ما + ۲ لا ما م - ۱

$$\therefore لا - ما = ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{اور } ۲ لا ما = ب \dots\dots\dots (۲)$$

$$(لا + ما)^۲ = (لا - ما)^۲ + ۲(لا ما) = ۱ + ب$$

$$\therefore لا + ما = ۱ + ب \dots\dots\dots (۳)$$

علامت جذر کے ماقبل ہم نے مثبت علامت اسلئے لکھی ہے۔ کہ

لا + ۲ ایک مثبت مقدار ہے کیونکہ لا اور ما دونوں حقیقی مقادیر ہیں۔

(۱) اور (۳) سے معلوم ہوا کہ

$$\frac{لا^2}{2} = \frac{ما^2 + ۲ب + ۲}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{ما^2 + ۲ب - ۲}{2} = لا^2$$

$$\therefore لا = \pm \left\{ \frac{ما^2 + ۲ب + ۲}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{اور} \quad \pm \left\{ \frac{ما^2 + ۲ب - ۲}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ حاصل ضرب لا ما کی وہی علامت ہوگی جو ب کی ہے۔ اسلئے اگر ب مثبت ہو تو

$$ما + ب = ۱ - \left\{ \frac{ما^2 + ۲ب + ۲}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \frac{ما^2 + ۲ب - ۲}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} = ۱ - ما$$

اور اگر ب منفی ہو تو

$$\pm = \left\{ \frac{ما^2 + ۲ب + ۲}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{ما^2 + ۲ب - ۲}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} = ۱ - ما$$

مثال ۱۔ - - - ۲۴ - ۱ - ما کا جذر نکالو۔

فرض کرو کہ $۱ - ما = ۲۴ - ۱ - ما$ $لا + ما = ۱ - ما$

تب $۲۴ - ۱ - ما = لا^2 = لا^2 + ۲لا + ما = ۱ - ما$

$$\therefore لا^2 - ۲لا - ۲۴ = ۰ \quad (۱)$$

اور $۲ لا = ۲۴ - ۱ - ما$

اب $(لا^2 + ۲لا) = (۲۴ - ۱ - ما) = ۲(۱۱۲) + ۲(۶ - لا) = ۲۴۵$

$$\therefore لا^2 + ۲لا = ۲۴۵ \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) سے معلوم ہوا کہ $۱۶ = ۴^۲$ اور $۹ = ۳^۲$

∴ $۳ ± ۴ = ۳ ± ۴$

چونکہ حاصل ضرب لانا منفی ہے اسلئے $۳ = ۳$ اور $۳ = -۳$ یا $۳ = -۳$

اور $۴ = ۴$

پس مطلوبہ قیمتیں ہوں گی $۳ - ۴$ اور $۳ + ۴$

یعنی $۴ - ۳ = ۱$ اور $۳ + ۴ = ۷$

مثال ۲۔ $۴ - ۳$ کی قیمت دریافت کرو

$۴ - ۳ = ۱$ اور $۳ + ۴ = ۷$

اب ہمیں $۴ ± ۳$ کی قیمت دریافت کرنی ہے

فرض کرو کہ $۴ + ۳ = ۷$

تب $۴ - ۳ = ۱$

∴ $۴ - ۳ = ۱$ اور $۳ + ۴ = ۷$

جس سے معلوم ہوا کہ $۱ = \frac{۱}{۴}$ اور $۷ = \frac{۱}{۳}$ یا $۱ = \frac{۱}{۴}$ اور $۷ = \frac{۱}{۳}$

∴ $۴ + ۳ = ۷$ اور $۴ - ۳ = ۱$

اسی طرح سے $۴ - ۳ = ۱$ اور $۳ + ۴ = ۷$

∴ $۴ ± ۳ = ۷$ اور $۴ - ۳ = ۱$

اور $۴ - ۳ = ۱$ اور $۳ + ۴ = ۷$

مثال ۳۔ $۴ + ۳$ کو عدد خیالی کی صورت میں لادو

$$\sqrt{1-m} + 1 = \sqrt{1-m+8} \quad m \text{ فرض کرو کہ}$$

$$\text{تب} \quad 1-m+8 = 1-m+8 \quad \text{اور} \quad 1-m+8 = 1-m+8$$

$$\text{اور} \quad (1-m+8) = 1-m+8 = 1-m+8$$

$$\therefore 1-m+8 = 1-m+8 \quad \text{اور} \quad 1-m+8 = 1-m+8$$

$$\text{جس سے معلوم ہوا کہ} \quad 1-m+8 = 1-m+8 \quad \text{اور} \quad 1-m+8 = 1-m+8$$

$$\text{اب چونکہ} \quad 1-m+8 = 1-m+8 \quad \text{اور} \quad 1-m+8 = 1-m+8$$

$$\text{اور} \quad 1-m+8 = 1-m+8$$

$$\therefore \sqrt{1-m+8} = \sqrt{1-m+8} \quad \text{جس کی صحت کی تصدیق}$$

طرفین کا مربع لینے سے ہو سکتی ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ

$$\sqrt{1-m+8} = \sqrt{1-m+8} \quad \text{اور} \quad \sqrt{1-m+8} = \sqrt{1-m+8}$$

۱۲۲۔ ۱-۱۱ یا خ کی قوتیں

$$1-m = 1-m \quad \text{یا} \quad 1-m = 1-m$$

$$1-m = 1-m \quad \text{یا} \quad 1-m = 1-m$$

$$1-m = 1-m \quad \text{یا} \quad 1-m = 1-m$$

$$1-m = 1-m \quad \text{یا} \quad 1-m = 1-m$$

چونکہ ۱-۱ کی ہر ایک قوت اپنی قوت ماقبل میں ۱-۱ کے ساتھ ضرب

کھانے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ دور مندرجہ بالا

کے بعد ۱-۱ کی خواہ کوئی قوت لی جائے وہی نتائج تکرار پائیں گے

جو اوپر مندرج ہیں مثلاً

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \times \{^2(\sqrt{-1})\} = ^4(\sqrt{-1})$$

$$\sqrt{-1} = ^3(\sqrt{-1}) = \{^2(\sqrt{-1})\} = ^6(\sqrt{-1})$$

$$1 = ^2(\sqrt{-1}) = \{^2(\sqrt{-1})\} = ^4(\sqrt{-1})$$

$$1 = ^4(\sqrt{-1}) = \{^2(\sqrt{-1})\} = ^2(\sqrt{-1})$$

۱۲۳۳۔ اب ہم چند کثیر الاستعمال مقادیر خیالی کے خواص دریافت کریں گے۔

$$\text{فرض کرو کہ } \sqrt{-1} = \sqrt{-1} \text{ تب } \sqrt{-1} = 1 \text{ یا } \sqrt{-1} = -1$$

$$\text{یعنی } (1 - \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1}) = 0$$

$$\text{اس لئے } 1 - \sqrt{-1} = 0 \text{ یا } 1 + \sqrt{-1} = 0$$

$$\text{جس سے } 1 = \sqrt{-1} \text{ یا } 1 = -\sqrt{-1}$$

اگر ہم لا کی مندرجہ بالا قیمتوں میں سے کسی ایک کی تیسری قوت لیں تو ہر ایک صورت میں ایک حاصل ہوگا معلوم ہوا کہ

$$\text{ایک کے جذراکعب کی تین قیمتیں } 1 = \sqrt[3]{1} \text{ اور } 1 = \sqrt[3]{-1} \text{ و } 1 = \sqrt[3]{-1}$$

ہیں اور ان میں سے دو خیالی ہیں اور ایک حقیقی۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ جذراکعب کی خیالی قیمتوں میں سے

ہر ایک دوسری قیمت کے مربع کے برابر ہے

$$\frac{1 - \sqrt{-1}}{1} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{1} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{1} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{1}$$

$$\frac{1 - \sqrt{-1}}{1} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{1} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{1}$$

لاؤ سہ و لاؤ سہ ہیں
اسی طرح سے ۹ کے جذور الکعب کی قیمتیں ۳۱۹ و ۳۱۹ x سہ و
۳۱۹ x سہ ہیں جہاں ۳۱۹ سے تیسری مرتبہ کا حسابی جذر تعبیر ہوتا ہے

مثال ۱۔ $\frac{2(1-\sqrt{13}+2)}{1-\sqrt{13}+2}$ کو ۱ + ب ۱-۲ کی صورت میں لائو
جملہ = $\frac{1-\sqrt{13}+2+9-2}{1-\sqrt{13}+2}$

$$\frac{(1-\sqrt{13}-2)(1-\sqrt{13}+2)}{(1-\sqrt{13}-2)(1-\sqrt{13}+2)} =$$

$$\frac{1-\sqrt{13}+2+9-2}{1+2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{13}+2+9-2}{5} = \frac{1-\sqrt{13}+9}{5}$$

اور یہ صورت مطلوبہ ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1-\sqrt{13}+2}{1-\sqrt{13}+2} \times \frac{1-\sqrt{13}-2}{1-\sqrt{13}+2} =$
 $\frac{1-\sqrt{13}-2}{1-\sqrt{13}+2}$

$$\frac{1-\sqrt{13}-2}{1-\sqrt{13}+2} = \frac{1-\sqrt{13}-2(1-\sqrt{13})+10-12}{1-\sqrt{13}+2(1-\sqrt{13})+13} =$$

$$\frac{(1-\sqrt{13}-2)(1-\sqrt{13}+2)}{(1-\sqrt{13}+2)(1-\sqrt{13}+2)} =$$

$$\frac{1-\sqrt{13}-2(1-\sqrt{13})+10-12}{2(1-\sqrt{13})+529-121} =$$

$$\frac{1-\sqrt{13}-2}{529-121} = \frac{1-\sqrt{13}-2}{529-121}$$

مثال ۳۔ لاؤ ۳ کے تین اجزاء ضربی درجہ اول دریافت کرو

چونکہ $لا^۳ + ما^۳ = (لا + ما) (لا^۲ - لا ما + ما^۲)$
 $\therefore لا^۳ + ما^۳ = (لا + ما) (لا^۲ - لا ما + ما^۲)$
 کیونکہ $سه + سه^۲ = ۱ - ۱$ اور $سه^۳ = ۱$
 مثال ۴۔ ثابت کرو کہ $(ا + سه ب + سه^۲ ج) (ا + سه ب + سه^۲ ج) = (ا + سه ب + سه^۲ ج)^۲$
 $= ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ۲ ا ب + ۲ ا ج + ۲ ب ج - ۲ ا ب - ۲ ا ج - ۲ ب ج$
 $ا + سه ب + سه^۲ ج$ اور $ا + سه ب + سه^۲ ج$ کے حاصل ضرب میں
 $ب^۲$ یا $ج^۲$ کا سر = $سه^۲ = ۱$
 $ب ج$ کا سر = $سه + سه^۲ = سه - ۱$
 $ج ا$ یا $ا ب$ کا سر = $سه + سه^۲ = سه - ۱$
 $\therefore (ا + سه ب + سه^۲ ج) (ا + سه ب + سه^۲ ج) = (ا + سه ب + سه^۲ ج)^۲$
 $= ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ۲ ا ب + ۲ ا ج + ۲ ب ج - ۲ ا ب - ۲ ا ج - ۲ ب ج$
 مثال ۵۔ ثابت کرو کہ $(ا + سه - سه^۲) (ا + سه - سه^۲) = (ا + سه - سه^۲)^۲$
 چونکہ $ا + سه + سه^۲ = ۰$
 $\therefore (ا + سه - سه^۲) (ا + سه - سه^۲) = (ا + سه - سه^۲)^۲$
 $= ۰ = ا + سه + سه^۲$

امثلہ نمبری ۱۱

۱۔ $۳ - ۲ - ۱ = ۳ - ۲ - ۱$ کو $۳ - ۲ - ۱$ سے ضرب دو
 ۲۔ $۳ - ۲ - ۱ = ۳ - ۲ - ۱$ کو $۳ - ۲ - ۱$ سے ضرب دو
 ۳۔ $۳ - ۲ - ۱ = ۳ - ۲ - ۱$ کو $۳ - ۲ - ۱$ سے ضرب دو
 ذیل کے جہوں کے نسب نماؤں کو ناطق بناؤ۔

$$-۴ \frac{۵-۲۲+۳-۲۳}{۵-۲۲-۳-۲۳}$$

$$-۵ \frac{\frac{۱-۲۷-۱}{۱-۲۷+۱} - \frac{۱-۲۷+۱}{۱-۲۷-۱}}$$

$$-۶ \frac{۲(۱-۲-۱) - ۳(۱-۲+۱)}{۳(۱-۲-۱) - ۲(۱-۲+۱)}$$

۷- (۱-۲) ۴+۵ کی قیمت دریافت کرو اس میں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

ذیل کے جملوں کا جذر نکالو

$$۸ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

۱۰- ۱۱- ۱۲- ۱۳- ۱۴- ۱۵- ۱۶- ۱۷- ۱۸- ۱۹- ۲۰- ۲۱- ۲۲- ۲۳- ۲۴- ۲۵- ۲۶- ۲۷- ۲۸- ۲۹- ۳۰- ۳۱- ۳۲- ۳۳- ۳۴- ۳۵- ۳۶- ۳۷- ۳۸- ۳۹- ۴۰- ۴۱- ۴۲- ۴۳- ۴۴- ۴۵- ۴۶- ۴۷- ۴۸- ۴۹- ۵۰- ۵۱- ۵۲- ۵۳- ۵۴- ۵۵- ۵۶- ۵۷- ۵۸- ۵۹- ۶۰- ۶۱- ۶۲- ۶۳- ۶۴- ۶۵- ۶۶- ۶۷- ۶۸- ۶۹- ۷۰- ۷۱- ۷۲- ۷۳- ۷۴- ۷۵- ۷۶- ۷۷- ۷۸- ۷۹- ۸۰- ۸۱- ۸۲- ۸۳- ۸۴- ۸۵- ۸۶- ۸۷- ۸۸- ۸۹- ۹۰- ۹۱- ۹۲- ۹۳- ۹۴- ۹۵- ۹۶- ۹۷- ۹۸- ۹۹- ۱۰۰

$$۱۲ - \frac{۲۲خ - ۳۳}{۲۲خ - ۳۳} - ۱۳ \frac{خ+۱}{خ-۱}$$

$$۱۴ - \frac{۲(خ+۱)}{خ-۱} - \frac{۲(خ-۱)}{خ+۱}$$

$$۱۵ - (خ+۱) + (خ-۱)$$

$$۱۶ - \frac{۱-۲}{۱-۲} + \frac{۱+۲}{۱+۲}$$

$$۱۷ - \frac{۱-۲۴-۷}{۱-۲۴-۳} + \frac{۱-۲۳۹+۲}{۱-۲۸+۶}$$

$$۱۸ - \text{ثابت کر دو کہ } \left(\frac{۳۲خ+۱}{۲} \right)^ن + \left(\frac{۳۲خ-۱}{۲} \right)^ن = ۱$$

توثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ لا مای} = ۳\text{ب} + ۳\text{ا}$$

$$(۲) \text{ لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ی}^۲ = ۶\text{ا ب}$$

$$(۳) \text{ لا}^۳ + \text{ما}^۳ + \text{ی}^۳ = ۳(۳\text{ا} + ۳\text{ب})$$

$$\text{۳۲۔ اگر لا + ج + ما + ب ی} = \text{لا}^۲ \text{ ج} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ا ی} = \text{ما}^۲$$

$$\text{اور ب لا + ا ما + ج ی} = \text{ے}$$

توثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ لا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - ۲\text{ب ج} - ۲\text{ج ا} - ۲\text{ا ب} = (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} - \text{ای} - \text{مای} - \text{یلا} - \text{لاما})$$

$$= \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ے}^۲ - \text{ماے} - \text{لاے} - \text{لاما}$$

$$\text{۳۳۔ اگر لا} = \text{لا} + \text{ا} + \text{ج} + \text{ما} + \text{ب ی}، \text{ما} = \text{ج} + \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ا ی}،$$

$$\text{ے} = \text{ب لا} + \text{ا ما} + \text{ج ی}$$

$$\text{توثابت کرو کہ لا}^۳ + \text{ما}^۳ + \text{ے}^۳ - ۳\text{لاماے}$$

$$= (۳\text{ب} + ۳\text{ج} - ۳\text{ا ب ج}) (\text{لا}^۳ + \text{ما}^۳ + \text{ی}^۳ - ۳\text{لامای})$$



باب نہم

مسائل مساوات درجہ دوم

۱۲۵۔ مساوات درجہ دوم وہ مساوات ہے جس میں تھویل اور اختصار کے بعد مقدار مجہول کی سب سے اعلیٰ قوت دو ہو مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ یہ ہے۔

$$a^2 + b + c = 0$$

اس میں مقادیر a و b و c معلوم ہیں اور ان کی رقوم میں مقدار مجہول x کی قیمت یا قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں مکرات a و b و c میں سے ایک یا دونوں صفر کے برابر ہو سکتے ہیں مگر بالعموم مساوات کا درجہ کم کئے بغیر ہم a کو صفر کے برابر نہیں فرض کر سکتے۔

۱۲۶۔ مساوات درجہ دوم کی دو سے زیادہ قیمتیں نہیں ہو سکتیں اگر ممکن ہو تو فرض کر دو کہ مساوات $a^2 + b + c = 0$

کی تین قیمتیں e و b و c ہیں اب چونکہ ان میں سے ہر ایک قیمت شرائط مساوات کو پورا کرتی ہے اسلئے

$$a^2 + b + c = 0 \dots\dots (۱)$$

$$a^2 + b + c = 0 \dots\dots (۲)$$

$$a^2 + b + c = 0 \dots\dots (۳)$$

مساوات (۲) کو (۱) سے تفریق کر دو تو حاصل ہوگا

$$(ا - عه) - (به - ج) = ۰$$

اب چونکہ عه - به صفر کے برابر نہیں ہے کیونکہ مساوات کی قیمتیں
سب مختلف فرض کی گئی ہیں اسلئے ہر ایک رقم کو عه - به پر تقسیم
کرنے سے

$$(ا - عه + به) + ب = ۰ \dots\dots\dots (۴)$$

اسی طرح مساوات (۲) اور (۳) سے حاصل ہوگا

$$(ا - به + ج) + ب = ۰ \dots\dots\dots (۵)$$

$$\text{عمل تفریق سے } (ا - عه - ج) = ۰ \dots\dots\dots (۶)$$

اور یہ ناممکن ہے کیونکہ ا صفر کے برابر نہیں ہے اور جیسا ہم نے ابتدا
میں فرض کیا عه اور جہ غیر مساوی ہیں پس ثابت ہوا کہ مساوات درجہ
دوم کی تین مختلف قیمتیں نہیں ہو سکتیں۔

نتیجہ صریح ۱۔ لاکھ تین مختلف قیمتیں شرائط مساوات $ا + لا + ب + لا + ج = ۰$

کو صرف اُس صورت میں پورا کر سکتی ہیں جب $ا = ۰$ ، $ب = ۰$ ، $ج = ۰$ ۔

کیونکہ اگر تین مختلف قیمتیں مساوات کو پورا کریں تو ربط (۶) صحیح ہونا

چاہیئے لیکن عه اور جہ غیر مساوی ہیں اسلئے یہ تعلق صرف اُس وقت

صحیح ہو سکتا ہے جب $ا = ۰$ ، لیکن اگر $ا = ۰$ تو (۴) یا (۵) سے $ب = ۰$

اور اسلئے (۱) یا (۲) یا (۳) سے $ج = ۰$ ۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر لاکھ تین مختلف قیمتیں مساوات $ا + لا + ب + لا + ج = ۰$ کو

پورا کریں تو لاکھ کوئی ایک قیمت مساوات کو پورا کرے گی یعنی اس

صورت میں مساوات متماثلہ ہوگی۔ کیونکہ بموجب نتیجہ صریح ۱ مساوات

کی صورت ہوگی $\cdot \times \text{لا} + \cdot \times \text{لا} + \cdot = \cdot$ جو لاکھ کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $\{2(-\text{لا} - \text{لا})(\text{ب} - \text{ب}) + (-\text{لا} - \text{لا})(\text{ب} - \text{ب}) + (-\text{لا} - \text{لا})(\text{ب} - \text{ب})\}$

$= (-\text{لا} - \text{ب})^2 + (-\text{لا} - \text{لا})^2 + (-\text{لا} - \text{ب})^2$ ایک مساوات متماثلہ ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر $(\text{ق} - \text{لا})^3 + (\text{ق} - \text{ب})^3 = (\text{ق} - \text{ج})^3$

$(\text{ق} - \text{ا})^3 + (\text{ق} - \text{ب})^3 = (\text{ق} - \text{ج})^3$

$(\text{ر} - \text{ا})^3 + (\text{ر} - \text{ب})^3 = (\text{ر} - \text{ج})^3$

تو $(\text{س} - \text{ا})^3 + (\text{س} - \text{ب})^3 = (\text{س} - \text{ج})^3$

۱۲۷۔ پیشتر اس کے کہ ہم مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ کا جبریتہ حل دریافت کر میں ہم اسکی مفصل ذیل خاص صورتوں پر غور کریں گے۔

(۱) فرض کرو کہ $\cdot = \cdot$ تو مساوات $\text{لا}^2 + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} = \cdot$ کی مختصر صورت

ہوگی $\text{لا} + \text{ب} + \text{لا} = \cdot$

یعنی $\text{لا}(\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\text{لا}}) = \cdot$

اب چونکہ لا صفر کے برابر نہیں ہے اسلئے $\text{لا} = \cdot$ یا $\frac{\text{ب}}{\text{لا}} = \cdot$

پس مساوات مفروضہ کی دو قیمتیں \cdot اور $\frac{\text{ب}}{\text{لا}}$ ہیں

(۲) فرض کرو کہ $\cdot = \cdot$ اور $\text{ج} = \cdot$

مساوات کی صورت عامہ اور بھی مختصر ہو گئی یعنی $\text{لا} \times \text{لا} = \cdot$

اب چونکہ لا صفر کے برابر نہیں ہے اسلئے $\{\text{لا} = \cdot\}$

اسلئے مساوات کی قیمتیں ہوئیں $\text{لا} = \cdot$ اور $\text{لا} = \cdot$

اس صورت میں قیمتیں برابر ہیں اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ مساوات کی صرف ایک ہی قیمت ہے۔ مگر اپنے نتائج کی صداقت عامہ

کو قائم رکھنے کے لئے یہ کہنا زیادہ مناسب ہوگا کہ مسادات کی دو
مساد کی قیمتیں ہیں۔

(۳) فرض کرو کہ ب = ۰

تب لا + ج = ۰

$$\text{یعنی } (لا + ۱ - \frac{ج}{۱}) (لا - ۱ - \frac{ج}{۱}) = ۰$$

چونکہ صفر کے برابر نہیں ہے اسلئے لا = ۱ - \frac{ج}{۱} اور لا = ۱ + \frac{ج}{۱} مطلوبہ
قیمتیں ہیں اس جگہ قیمتیں مساوی مگر مختلف علامت ہیں اگر \frac{ج}{۱}
منفی مقدار ہو تو دونوں قیمتیں حقیقی ہونگی اگر \frac{ج}{۱} مثبت مقدار ہو
تو دونوں قیمتیں خیالی ہونگی اور اس حالت میں ہم انہیں اس طرح
بھی لکھ سکیں گے لا = - ۱ - \frac{ج}{۱} اور لا = ۱ + \frac{ج}{۱}

۱۲۸۔ مسادات درجہ دوم کی صورت عامہ کا حل اس حالت میں
جب لا و ب و ج سب محدود مقداریں ہوں اور ان میں سے کوئی
بھی صفر کے برابر نہ ہو مختلف طریقوں سے حاصل ہو سکتا ہے لیکن
ہم اس جگہ عام مستقل ترکیب تکمیل محذور کو اختیار کریں گے۔

$$لا + ۲ + ب + لا + ج = ۰$$

اثر عام مسادات کو لا پر تقسیم کرنے سے

$$لا + \frac{ب}{۱} + لا + \frac{ج}{۱} = ۰$$

عمل نقل سے لا + \frac{ب}{۱} + لا = - \frac{ج}{۱}

طرفین پر (\frac{ب}{۲}) زیادہ کرنے سے

$$لا + \frac{ب}{۱} + لا + \frac{ب}{۲} = - \frac{ج}{۱} + \frac{ب}{۲}$$

دائیں طرف کا جملہ مربع کامل ہے یعنی $(\frac{ب}{۱۲} + لا)^۲$

$$\frac{ب^۲ - ۲ب - ۴}{۱۲} = (\frac{ب}{۱۲} + لا)^۲$$

طرفین کا جذر لینے سے $لا + \frac{ب}{۱۲} = \pm \sqrt{\frac{ب^۲ - ۲ب - ۴}{۱۲}}$

$$لا = \frac{ب - \pm \sqrt{ب^۲ - ۲ب - ۴}}{۱۲}$$

۱۲۹۔ اگر مساوات کی مذکورہ بالا قیمتیں عہ اور بہ سے تعبیر کجائیں تو

$$عہ = \frac{ب - \pm \sqrt{ب^۲ - ۲ب - ۴}}{۱۲} \text{ اور } بہ = \frac{ب + \pm \sqrt{ب^۲ - ۲ب - ۴}}{۱۲}$$

ظاہر ہے کہ

(۱) اگر $ب^۲ - ۲ب - ۴$ (مقدار جو علامت جذر کے اندر ہے) مثبت

ہو تو عہ اور بہ حقیقی اور غیر مساوی ہونگی

(۲) اگر $ب^۲ - ۲ب - ۴ = ۰$ تو عہ اور بہ حقیقی اور مساوی ہونگی

(۳) اگر $ب^۲ - ۲ب - ۴$ منفی ہو تو عہ اور بہ خیالی اور غیر مساوی ہونگی

(۴) اگر $ب^۲ - ۲ب - ۴$ مربع کامل ہو تو عہ اور بہ ناطق اور غیر مساوی ہونگی

صرف ان نتائج کی استنتاج سے ہم مساوات کو حل کئے بغیر اس کی

قیمتوں کے مختلف خواص دریافت کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ لاکھ کوئی حقیقی قیمت شرائط مساوات

$$۲لا^۲ - ۶لا + ۴ = ۰ \text{ کو پورا نہیں کر سکتی۔}$$

$$\text{یہاں } ۱ = ۲ \text{ و } ۲ = ۴ \text{ و } ۶ = ۳۶ \text{ و } ۴ = ۱۶$$

$$\therefore ب^۲ - ۲ب - ۴ = (-۶) - ۲ \times ۲ \times ۲ = -۲۰$$

پس معلوم ہوا کہ مساوات کی قیمتیں خیالی ہیں
مثال ۲۔ اگر مساوات $۲ + (ک) = ۱۱ + ۹ = ۲۰$ کی قیمتیں
مساوی ہوں تو $ک$ کی قیمت دریافت کرو
قیمتوں کے مساوی ہونے کی شرط یہ ہے کہ $۲ + (ک) = ۲۰$ $ک = ۱۸$
یعنی $۲ + ۱۸ = ۲۰$

$$\therefore k = m \text{ یا } k = 1$$

مثال ۳۔ ثبات کرو کہ مساوات

۲-۲ ف + لا + ف - ۲ ق + ۲ ق - ر - ۲ = ۰ کی دونوں قیمتیں
ناظمی ہیں۔

دو نون قیمتیں نامطابق ہونگی اگر $(-2, 4)$ $(-2, 2)$ $(-2, 0)$ $(-2, -2)$ $(-2, -4)$ $(-2, -6)$ $(-2, -8)$ $(-2, -10)$ $(-2, -12)$ $(-2, -14)$ $(-2, -16)$ $(-2, -18)$ $(-2, -20)$ $(-2, -22)$ $(-2, -24)$ $(-2, -26)$ $(-2, -28)$ $(-2, -30)$ $(-2, -32)$ $(-2, -34)$ $(-2, -36)$ $(-2, -38)$ $(-2, -40)$ $(-2, -42)$ $(-2, -44)$ $(-2, -46)$ $(-2, -48)$ $(-2, -50)$ $(-2, -52)$ $(-2, -54)$ $(-2, -56)$ $(-2, -58)$ $(-2, -60)$ $(-2, -62)$ $(-2, -64)$ $(-2, -66)$ $(-2, -68)$ $(-2, -70)$ $(-2, -72)$ $(-2, -74)$ $(-2, -76)$ $(-2, -78)$ $(-2, -80)$ $(-2, -82)$ $(-2, -84)$ $(-2, -86)$ $(-2, -88)$ $(-2, -90)$ $(-2, -92)$ $(-2, -94)$ $(-2, -96)$ $(-2, -98)$ $(-2, -100)$ $(-2, -102)$ $(-2, -104)$ $(-2, -106)$ $(-2, -108)$ $(-2, -110)$ $(-2, -112)$ $(-2, -114)$ $(-2, -116)$ $(-2, -118)$ $(-2, -120)$ $(-2, -122)$ $(-2, -124)$ $(-2, -126)$ $(-2, -128)$ $(-2, -130)$ $(-2, -132)$ $(-2, -134)$ $(-2, -136)$ $(-2, -138)$ $(-2, -140)$ $(-2, -142)$ $(-2, -144)$ $(-2, -146)$ $(-2, -148)$ $(-2, -150)$ $(-2, -152)$ $(-2, -154)$ $(-2, -156)$ $(-2, -158)$ $(-2, -160)$ $(-2, -162)$ $(-2, -164)$ $(-2, -166)$ $(-2, -168)$ $(-2, -170)$ $(-2, -172)$ $(-2, -174)$ $(-2, -176)$ $(-2, -178)$ $(-2, -180)$ $(-2, -182)$ $(-2, -184)$ $(-2, -186)$ $(-2, -188)$ $(-2, -190)$ $(-2, -192)$ $(-2, -194)$ $(-2, -196)$ $(-2, -198)$ $(-2, -200)$ $(-2, -202)$ $(-2, -204)$ $(-2, -206)$ $(-2, -208)$ $(-2, -210)$ $(-2, -212)$ $(-2, -214)$ $(-2, -216)$ $(-2, -218)$ $(-2, -220)$ $(-2, -222)$ $(-2, -224)$ $(-2, -226)$ $(-2, -228)$ $(-2, -230)$ $(-2, -232)$ $(-2, -234)$ $(-2, -236)$ $(-2, -238)$ $(-2, -240)$ $(-2, -242)$ $(-2, -244)$ $(-2, -246)$ $(-2, -248)$ $(-2, -250)$ $(-2, -252)$ $(-2, -254)$ $(-2, -256)$ $(-2, -258)$ $(-2, -260)$ $(-2, -262)$ $(-2, -264)$ $(-2, -266)$ $(-2, -268)$ $(-2, -270)$ $(-2, -272)$ $(-2, -274)$ $(-2, -276)$ $(-2, -278)$ $(-2, -280)$ $(-2, -282)$ $(-2, -284)$ $(-2, -286)$ $(-2, -288)$ $(-2, -290)$ $(-2, -292)$ $(-2, -294)$ $(-2, -296)$ $(-2, -298)$ $(-2, -300)$ $(-2, -302)$ $(-2, -304)$ $(-2, -306)$ $(-2, -308)$ $(-2, -310)$ $(-2, -312)$ $(-2, -314)$ $(-2, -316)$ $(-2, -318)$ $(-2, -320)$ $(-2, -322)$ $(-2, -324)$ $(-2, -326)$ $(-2, -328)$ $(-2, -330)$ $(-2, -332)$ $(-2, -334)$ $(-2, -336)$ $(-2, -338)$ $(-2, -340)$ $(-2, -342)$ $(-2, -344)$ $(-2, -346)$ $(-2, -348)$ $(-2, -350)$ $(-2, -352)$ $(-2, -354)$ $(-2, -356)$ $(-2, -358)$ $(-2, -360)$ $(-2, -362)$ $(-2, -364)$ $(-2, -366)$ $(-2, -368)$ $(-2, -370)$ $(-2, -372)$ $(-2, -374)$ $(-2, -376)$ $(-2, -378)$ $(-2, -380)$ $(-2, -382)$ $(-2, -384)$ $(-2, -386)$ $(-2, -388)$ $(-2, -390)$ $(-2, -392)$ $(-2, -394)$ $(-2, -396)$ $(-2, -398)$ $(-2, -400)$ $(-2, -402)$ $(-2, -404)$ $(-2, -406)$ $(-2, -408)$ $(-2, -410)$ $(-2, -412)$ $(-2, -414)$ $(-2, -416)$ $(-2, -418)$ $(-2, -420)$ $(-2, -422)$ $(-2, -424)$ $(-2, -426)$ $(-2, -428)$ $(-2, -430)$ $(-2, -432)$ $(-2, -434)$ $(-2, -436)$ $(-2, -438)$ $(-2, -440)$ $(-2, -442)$ $(-2, -444)$ $(-2, -446)$ $(-2, -448)$ $(-2, -450)$ $(-2, -452)$ $(-2, -454)$ $(-2, -456)$ $(-2, -458)$ $(-2, -460)$ $(-2, -462)$ $(-2, -464)$ $(-2, -466)$ $(-2, -468)$ $(-2, -470)$ $(-2, -472)$ $(-2, -474)$ $(-2, -476)$ $(-2, -478)$ $(-2, -480)$ $(-2, -482)$ $(-2, -484)$ $(-2, -486)$ $(-2, -488)$ $(-2, -490)$ $(-2, -492)$ $(-2, -494)$ $(-2, -496)$ $(-2, -498)$ $(-2, -500)$ $(-2, -502)$ $(-2, -504)$ $(-2, -506)$ $(-2, -508)$ $(-2, -510)$ $(-2, -512)$ $(-2, -514)$ $(-2, -516)$ $(-2, -518)$ $(-2, -520)$ $(-2, -522)$ $(-2, -524)$ $(-2, -526)$ $(-2, -528)$ $(-2, -530)$ $(-2, -532)$ $(-2, -534)$ $(-2, -536)$ $(-2, -538)$ $(-2, -540)$ $(-2, -542)$ $(-2, -544)$ $(-2, -546)$ $(-2, -548)$ $(-2, -550)$ $(-2, -552)$ $(-2, -554)$ $(-2, -556)$ $(-2, -558)$ $(-2, -560)$ $(-2, -562)$ $(-2, -564)$ $(-2, -566)$ $(-2, -568)$ $(-2, -570)$ $(-2, -572)$ $(-2, -574)$ $(-2, -576)$ $(-2, -578)$ $(-2, -580)$ $(-2, -582)$ $(-2, -584)$ $(-2, -586)$ $(-2, -588)$ $(-2, -590)$ $(-2, -592)$ $(-2, -594)$ $(-2, -596)$ $(-2, -598)$ $(-2, -600)$ $(-2, -602)$ $(-2, -604)$ $(-2, -606)$ $(-2, -608)$ $(-2, -610)$ $(-2, -612)$ $(-2, -614)$ $(-2, -616)$ $(-2, -618)$ $(-2, -620)$ $(-2, -622)$ $(-2, -624)$ $(-2, -626)$ $(-2, -628)$ $(-2, -630)$ $(-2,$

$$(-ب)۲ - (ب۲ - ۲ج) = \frac{۲ج}{۲۱۳} = \frac{ج}{۱} \dots\dots (۲)$$

اگر مساوات کو صورت ذیل میں لکھا جائے یعنی
 $\frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} = \dots$ تو ان نتائج کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں
 اگر کسی مساوات درجہ دوم کی رقم اول کا سر ایک ہو تو
 (۱) اُس کی قیمتوں کا مجموعہ برابر ہوگا لاکے سر کے جس کی علامت
 بدل دی جائے۔

(۲) اس کی قیمتوں کا حاصل ضرب برابر ہوگا مساوات کی تیسری رقم کے
 عکس۔ مساوات کی اُس رقم کو جس میں مقدار بحیول شامل نہ ہو رقم مطلق کہتے ہیں۔

$$۱۳۱ - \text{چونکہ } \frac{۲}{۱} = عہ + عہ + عہ \text{ اور } \frac{ج}{۱} = عہ + عہ$$

$$\text{مساوات } \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} = \frac{ج}{۱} \text{ صورت ذیل میں بھی لکھی جاسکتی}$$

$$\frac{۲}{۱} - (عہ + عہ) = عہ + عہ \dots\dots (۱)$$

معلوم ہوا کہ ہر ایک مساوات درجہ دوم اس صورت میں لکھی جاسکتی ہے
 $\frac{۲}{۱} - (قیمتوں کا مجموعہ) = عہ + عہ$ کا حاصل ضرب = $\dots\dots (۲)$

نیز (۱) سے (۲) - (عہ) = (عہ) = $\dots\dots (۳)$
 اگر کسی مساوات کی صرف قیمتیں دی ہوئی ہوں تو اب ہم اُس مساوات
 کو دریافت کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک مساوات کی قیمتیں ۳ اور ۲ ہیں اس کو دریافت کرو۔
 مساوات مطلوبہ ہے (۳ - عہ) (۲ - عہ) = $\dots\dots$

$$\frac{۲}{۱} - عہ = ۶ - عہ$$

جب قیمتیں اصم یا غیر منطقی ہوں تو طریق ذیل کو اختیار کرنے میں زیادہ

سہولت ہوگی۔

مثال ۲۔ ایک مساوات کی قیمتیں $۲ + ۳۴$ اور $۲ - ۳۴$ ہیں اس کو دریافت کرو۔

قیمتوں کا حاصل جمع = ۴ اور قیمتوں کا حاصل ضرب = ۱

قاعدہ (۲) کی استعانت سے مساوات ہوئی لا۔ $۴ + ۱ = ۱$ ۔

مثال ۳۔ ایک مساوات کی قیمتیں ۲ و ۳ دے دیں اُسے دریافت کرو مساوات ذیل میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے

$$۲ - ۱ = ۳ + ۱۰ = ۱۱ - ۱ = \frac{۱}{۵}$$

اسلئے مساوات مطلوبہ ہوگی $(۲ - ۱)(۳ + ۱)(۱۱ - ۱) = (\frac{۱}{۵} - ۱)$ ۔

$$۰ = (۲ - ۱)(۳ + ۱)(۱۱ - ۱)$$

$$۰ = ۲۲ - ۱۱ - ۳۳ + ۱۱$$

مثال ۴۔ ایسی مساوات مرتب کرو جس کی قیمتیں ۰ و $\frac{۱}{۵}$ ہوں لا۔ $۰ = ۱ - ۱ = ۱ - ۱ = \frac{۱}{۵}$ میں سے ہر ایک مساوات مطلوبہ کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

اسلئے مساوات ہوئی لا $(۱ - ۱)(۱ - ۱)(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۰$ ۔

$$۰ = (۱ - ۱)(۱ - ۱)(۱ - \frac{۱}{۵})$$

$$۰ = ۱ - ۱ - ۱ + ۱ + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۵} = ۰$$

۱۳۲۔ نتائج دفعہ ۱۳۰ نہایت ضروری ہیں اور مساوات درجہ دوم کی قیمتوں کے متعلق جو بھی سوالات ہوں اُن کو حل کرنے کے لئے عام طور پر کافی ثابت ہوتے ہیں۔ گراہیے سوالات میں ہیں مساوات کی قیمتوں پر علیحدہ علیحدہ غور نہیں کرنا چاہیئے۔ لیکن ان کے حاصل جمع

اور حاصل ضرب کو مساوات کے سرورں یا کمروں کی رقوم میں لکھنے سے جو ارتباطات حاصل ہوں ان کو استعمال کرنا چاہیے۔

مثال ۱۔ اگر $\frac{1}{2}b$ اور b مساوات $\frac{1}{2}b + c = 0$ کی قیمتیں ہوں تو

$$(1) \frac{1}{2}b + b = (2) \frac{1}{2}b + b \text{ کی قیمتیں دریافت کرو}$$

$$\text{یہاں } \frac{1}{2}b + b = c \text{ اور } \frac{1}{2}b = c$$

$$\therefore \frac{1}{2}b + b = (b + \frac{1}{2}b) = 2 - \frac{1}{2}b = c - \frac{1}{2}b$$

$$\text{نیز } \frac{1}{2}b + b = (b + \frac{1}{2}b) = (b - \frac{1}{2}b)$$

$$= c - (b + \frac{1}{2}b) = 3 - \frac{1}{2}b$$

$$= c - (3 - \frac{1}{2}b)$$

مثال ۲۔ اگر $\frac{1}{2}b$ اور b مساوات $\frac{1}{2}b + m + n = 0$ کی قیمتیں ہوں

تو ایسی مساوات دریافت کرو جس کی قیمتیں $\frac{1}{2}b$ اور $\frac{1}{2}b$ ہوں۔

$$\text{قیمتوں کا حاصل جمع} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b$$

$$\text{قیمتوں کا حاصل ضرب} = \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}b = 1$$

اسلئے دفعہ ۱۳۱ کے بموجب مساوات مطلوبہ ہوئی

$$\frac{1}{2}b - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\right) = 1 + 1 = 0$$

$$\text{یا } \frac{1}{2}b - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\right) = 1 + 1 = 0$$

ہم مثال بالا میں ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\frac{1}{2}b + b = \frac{2 - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b} \text{ اور } \frac{1}{2}b = \frac{n}{n}$$

$$\therefore \text{اسے مساوات مطلوبہ ہے } \frac{n}{n} - \frac{2 - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b} + \frac{n}{n} = 0$$

ان ل لا۔ (م ۲۔ ن ۲) ل + لا + ن ل = ۰۔
 مثال ۳۔ اگر $\frac{1-۱۵+۳}{۲}$ تو $۲ لا + ۳ لا - ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا$ کی
 قیمت دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوگی
 اگر ہم لا کی بجائے جملہ مجوزہ میں $\frac{1-۱۵-۳}{۲}$ لکھیں
 سب سے پہلے ایک ایسی مساوات معلوم کرو جس کی قیمتیں $\frac{1-۱۵ \pm ۳}{۲}$ ہوں
 قیمتوں کا مجموعہ = ۳ اور قیمتوں کا حاصل ضرب = $\frac{۱۶}{۲}$
 اسلئے مساوات ہوئی $۲ لا - ۶ لا + ۱۶ = ۰$ ۔
 پس $۲ لا - ۶ لا + ۱۶$ ایک ایسا جملہ درجہ دوم ہے جو $\frac{1-۱۵ \pm ۳}{۲}$ میں
 سے ہر ایک قیمت کے لئے نابود ہوتا ہے۔
 اب $۲ لا + ۳ لا - ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا + ۱۶$
 $+ (۲ لا - ۶ لا + ۱۶) = ۴ + ۱۶ = ۲۰$ اور یہ ہر ایک
 صورت مفروضہ میں جملہ کی قیمت عددی ہے۔
 ۱۳۳۔ کن شرائط کے ماتحت مساوات $لا + لا + ب لا + ج = ۰$ ۔
 کی قیمتیں (۱) مساوی المقدار اور مختلف العلامت (۲) ایک دوسرے
 کی متکافی یا مقلوب ہوں گی؟
 قیمتیں مقدار میں برابر اور علامت میں مختلف ہوں گی اگر ان کا حاصل جمع
 صفر ہو اسلئے شرط مطلوبہ ہے $-\frac{۱}{۲} = ۰$ ۔ یعنی ب = ۰۔
 اگر قیمتیں ایک دوسری کی متکافی ہوں تو ان کا حاصل جمع ایک ہوگا
 اسلئے $\frac{۱}{۲} = ۱$ یعنی ج = ۱۔
 نتیجہ اول ہندسہ تحلیل میں اکثر استعمال ہوتا ہے اور نتیجہ دوم ایک ایسی
 شرط عامہ کی خاص صفت ہے جو ہر ایک درجہ مساوات کے لئے

درست ہے۔

۱۳۴۔ کن شرائط کے ماتحت مساوات $\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5 + \lambda^6 + \lambda^7 + \lambda^8 + \lambda^9 + \lambda^{10} = 0$ کی قیمتیں (۱) دونوں مثبت ہوں گی (۲) مختلف علامت مگر ان میں سے بڑی منفی ہوگی۔

$$\text{عہ} + \text{بہ} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{عہ بہ} = \frac{1}{2}$$

(۱) اگر دونوں قیمتیں مثبت ہوں تو حاصل ضرب عہ بہ مثبت ہوگا اور اس لئے ج کی وہی علامت ہوگی جو λ کی۔
نیز چونکہ عہ + بہ مثبت ہے اس لئے $\frac{1}{2}$ منفی ہے اس لئے ب اور λ کی علامات مختلف ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ شرط مطلوبہ یہ ہے کہ λ اور ج کی علامتیں متشابہ مگر ب کی علامت سے مختلف ہیں۔

(۲) اگر قیمتیں علامت میں مختلف ہوں تو حاصل ضرب عہ بہ منفی ہوگا اور اس لئے ج کی علامت λ سے مختلف ہوگی۔

نیز عہ + بہ کی وہی علامت ہے جو مساوات کی بڑی قیمت کی اور یہ قیمت منفی ہے اس لئے $\frac{1}{2}$ مثبت ہے اس لئے λ اور ب کی علامات متشابہ ہیں۔

اس لئے شرط مطلوبہ یہ ہے کہ λ اور ب کی علامتیں متشابہ مگر ج کی علامت سے مختلف ہیں۔

۱۳۵۔ کن شرائط کے ماتحت مساوات $\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5 + \lambda^6 + \lambda^7 + \lambda^8 + \lambda^9 + \lambda^{10} = 0$ کی (۱) ایک قیمت صفر ہوگی (۲) دونوں قیمتیں صفر ہوگی (۳) ایک

قیمت غیر متناہی ہوگی (۴) دونوں قیمتیں غیر متناہی ہونگی ؟

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \frac{1}{4} \dots\dots (۱)$$

$$\text{عہ} \times \text{بہ} = \frac{1}{4} \dots\dots (۲)$$

صورت اول - اگر ایک قیمت صفر ہو تو عہ \times بہ = $\frac{1}{4}$ = ج
جس سے معلوم ہوا کہ ج = .

صورت دوم - اگر دونوں قیمتیں صفر ہوں تو

$$\text{عہ} + \text{بہ} = \frac{1}{4} = .$$

$$\text{یعنی ب} = . \text{ اور عہ بہ} = \frac{1}{4} = . \text{ یعنی ج} = .$$

پس اس صورت میں ب = ج = .

اگر مساوات کی کوئی قیمت صفر نہ ہو تو لا پر تقسیم کرنے سے ہم اس کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں -

$$۱ + \text{ب} + \frac{۱}{۱۰} \text{ج} = \frac{۱}{۱۰} \dots\dots (۳)$$

فرض کرو کہ $\frac{۱}{۱۰} = \text{ماتب}$

$$\text{ج} + ۱۰ + \text{ب} + ۱۰ = ۱۰ \dots\dots\dots (۴)$$

اس مساوات کی قیمتیں $\frac{۱}{۱۰}$ اور $\frac{۱}{۱۰}$ ہیں -

صورت سوم - اگر عہ لا انتہا بڑا ہو تو $\frac{۱}{۱۰}$ لا انتہا چھوٹا ہوگا -

یعنی مساوات (۳) کی ایک قیمت صفر ہوگی اور اس کے لئے ضروری ہے کہ $۱ = .$ جیسا ہم نے اوپر ثابت کیا -

صورت چہارم - اگر عہ اور بہ دونوں لا انتہا بڑے ہوں تو $\frac{۱}{۱۰}$ اور $\frac{۱}{۱۰}$

لا انتہا چھوٹے ہونگے یعنی اس صورت میں مساوات (۳) کی دونوں

قیمتیں صفر ہونگی اس لئے ضروری ہے کہ $۱ = \text{ب} = .$ بموجب صورت (۲)

پس ثابت ہوا کہ مساوات ۱ لا ۱ ب لا ۱ ج $= ۰$ کی ایک قیمت لا انتہا بڑی ہوگی اگر لا ۱ کا سر صفر ہو اور دونوں قیمتیں لا انتہا بڑی ہوگی اگر لا ۱ اور لا ۲ دونوں کے سر صفر ہوں۔
ہم نتائج مذکورہ بالا کو نقشہ ذیل میں اکٹھا لکھتے ہیں تاکہ آئندہ حوالہ دینے میں آسان ہو۔

دو قیمتیں حقیقی	ب ۲ - ج ۱ < ۰	دو قیمتیں منفی	ج ۱ + د ۲ $+ \frac{ج}{د}$
دو قیمتیں خیالی	ب ۲ - ج ۱ > ۰	قیمتیں مختلف علامت	ج ۱ - $\frac{ج}{د}$
دو قیمتیں مساوی	ب ۲ - ج ۱ $= ۰$	ایک قیمت $= ۰$	ج $= ۰$
قیمتیں مساوی مگر مختلف علامت	ب $= ۰$	دو قیمتیں $= ۰$	ب $= ۰$ ، ج $= ۰$
دو قیمتیں مثبت	ج ۱ + د ۲ $- \frac{ج}{د}$	ایک قیمت ∞	د $= ۱$
		دو قیمتیں ∞	د $= ۱$ اور ب $= ۰$

۱۔ مثلہ نمبری ۱۲

جن مساواتوں کی قیمتیں حسب ذیل ہیں انہیں مرتب کرو

۱- $۱ - \frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۵}$ ۲- $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ ۳- $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۵}$

۴- $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵}$ ۵- $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}$

۶- $۱ - \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲} - ۱$ ۷- $۱ + \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲} + ۱$

۸- $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}$ ۹- $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}$

۱۰- ثابت کرو کہ مساوات ذیل کی قیمتیں حقیقی ہیں

(۱) لا ۱ - لا ۲ + لا ۳ - ب ۲ - ج ۱ $= ۰$

(۲) $(ا - ب + ج) لا + م (ا - ب) لا + (ا - ب - ج) = ۰$
 ۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا + ۲ (ف + ق) لا + ۲ (ف + ق) = ۰$ کی قیمتیں خیالی ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات $\{ج - ۲ ب + ج + ب\} لا + ۲ (ب + ج) لا + ۲ (ب + ج) = ۰$ کی قیمتیں خیالی ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $(ا - ب) (ا - ج) + (ا - ج) (ا - لا) + (ا - لا) (ا - ب) = ۰$ کی قیمتیں حقیقی ہیں اور وہ برابر نہیں ہو سکتیں جب تک کہ $ا، ب، ج$ ایک دوسرے کے برابر نہ ہوں۔

۱۳۔ اگر مساوات $لا - ۱۵ - م (۲ لا - ۸) = ۰$ کی قیمتیں برابر ہوں تو $م$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۴۔ $م$ کی کس قیمت کے لئے مساوات $\frac{لا - ب}{ا - ج} = \frac{م - ۱}{م + ۱}$ کی قیمتیں مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہو سکیں؟

۱۵۔ ثابت کرو کہ معادلات ذیل کی قیمتیں ناطق ہیں

(۱) $(ا + ج - ب) لا + ۲ ج لا + (ب + ج - ا) = ۰$

(۲) $ا ب ج لا + ۳ ج لا + ب ج لا - ۴ ا ب + ۲ ب = ۰$

اگر $عہ$ اور $بہ$ مساوات $لا + ب لا + ج = ۰$ کی قیمتیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۶۔ $عہ + بہ$

۱۷۔ $\frac{۱}{عہ} + \frac{۱}{بہ}$

۱۸۔ $(\frac{۱}{عہ} - \frac{۱}{بہ})^۲$

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو

- ۱۹- $\bar{a} + \bar{a} - \bar{a} = 22 + \bar{a}$ جب $\bar{a} = 1 + 2 - 1$
- ۲۰- $\bar{a} - \bar{a} = 15 + \bar{a}$ جب $\bar{a} = 3 + 1 - 1$
- ۲۱- $\bar{a} - \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} + \bar{a} = 3$ جب $\bar{a} = 1 - 1 - 1$
- ۲۲- اگر عہ اور بہ مساوات $\bar{a} + \bar{a} + \bar{a} = 0$ کی قیمتیں ہوں تو ایسی مساوات مرتب کرو جس کی قیمتیں (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) ہوں۔
- ۲۳- ثابت کرو کہ مساوات $(\bar{a} - \bar{a}) (\bar{a} - \bar{a}) = \bar{a}$ کی قیمتیں ہمیشہ حقیقی ہوں گی۔
- ۲۴- اگر \bar{a} و \bar{a} مساوات $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a}$ کی قیمتیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔
- (۱) $(\bar{a} + \bar{a}) - (\bar{a} + \bar{a})$
- (۲) $(\bar{a} + \bar{a}) - (\bar{a} + \bar{a})$
- ۲۵- اگر مساوات $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a}$ کی ایک قیمت دوسری کی ن گئی ہو تو اسکے مکرووں کا باہمی ربط دریافت کرو۔
- ۲۶- ایک ایسی مساوات دریافت کرو جس کی قیمتیں مساوات $\bar{a} + \bar{a} = (\bar{a} + \bar{a}) + \bar{a} + \bar{a} = 0$ کی قیمتوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مربعوں کے برابر ہوں۔
- ۲۷- مساوات $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{a}$ کی قیمتیں عہ اور بہ ہیں ایک ایسی مساوات بناؤ جس کی قیمتیں عہ + بہ اور عہ - بہ ہوں۔
- ۲۸- مساوات $\bar{a} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{a}$ کی قیمتوں کی علامات پر بحث کرو۔

۱۳۶- مثال ذیل سے نتائج دفعہ ۱۲۹ کے استعمال کی توضیح

ہوگی۔

مثال - اگر لاکوئی مقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{11-2+2}{2(13-11)}$ تمام عددی قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ اور ۶ کے درمیان واقع ہوں۔

فرض کرو کہ جملہ معلومہ کو ہم ما سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$1 \text{ سلتے } 2 = \frac{11-2+2}{2(13-11)}$$

ضرب دینے سے $2 + 2(1-1) + 11 - 2 = 0$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے اور اگر لاکوئی قیمتیں حقیقی ہوں تو ضروری ہے کہ ۴ (۱-۱) ۲-۲ (۱۱-۱۱) مثبت ہو یا ۴ پر تقسیم کرنے اور اختصاراً کے بعد ضروری ہے کہ ۲-۱۱+۱۲ مثبت ہو یعنی (۱۱-۱۱) (۱۱-۱۱) مثبت ہو

پس معلوم ہوا کہ اس حاصل ضرب کے دونوں اجزاء ضربی مثبت ہونے چاہئیں یا دونوں منفی۔ پہلی صورت میں ما < ۶ اور دوسری صورت میں ما > ۲ ۱ سلتے ثابت ہوا کہ ما کی قیمت ۲ اور ۶ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی مگر سوائے اسکے ما یعنی جملہ معلومہ باقی تمام عددی قیمتیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے۔

اس مثال میں یہ بات قابل غور ہے کہ جملہ درجہ دوم ما-۱۱+۱۲ کی قیمت مثبت ہے جب تک کہ ما کی قیمت مساوات درجہ دوم ما-۱۱+۱۲ کی قیمتوں کے درمیان واقع نہ ہو یہ ایک مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے اس کی تحقیق ہم دفعہ ذیل میں کریں گے۔

۱۳۷- لاکوئی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ $2 + 2(1-1) + 11 - 2$ کی

علامت وہی ہوگی جو ا کی ہے سوائے اُس صورت کے جب مساوات
 $\text{ا} + \text{ا}^۲ + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} = ۰$ کی قیمتیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں اور لا کی
 قیمت ان کے درمیان واقع ہو۔

$$\begin{aligned} \text{جملہ } \text{ا} + \text{ا}^۲ + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \text{لا} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \right\} \\ &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \right) + \frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} \right\} \\ &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \right) - \frac{\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا}^۲} \right\} \dots (۱) \end{aligned}$$

صورت اول۔ فرض کرو کہ $\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج} < ۰$ تب

$$\begin{aligned} \text{جملہ } \text{ا} + \text{ا}^۲ + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} \right) - \frac{\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا}^۲} \right\} \\ &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا}^۲} \right\} \\ &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا}^۲} \right\} \\ &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا}^۲} \right\} \\ &= \text{ا} \left\{ \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ج}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب} - ۲ - ۲\text{ا} + \text{ج}}{\text{ا}^۲} \right\} \end{aligned}$$

فرض کرو کہ عد بڑا ہے عد سے۔

اب اگر لا $<$ عد تو اجزاء ضربی لا۔ عد اور لا۔ عد دونوں مثبت ہونگے
 اور اگر لا $>$ عد تو اجزاء ضربی لا۔ عد اور لا۔ عد دونوں منفی ہونگے۔
 پس ہر حالت میں جملہ (لا۔ عد) (لا۔ عد) مثبت ہوگا اور لا + ب + ج
 کی علامت وہی ہوگی جو ا کی۔

لیکن اگر لا کی قیمت عد اور ب۔ عد کے درمیان واقع ہوتو
 جملہ (لا۔ عد) (لا۔ عد) کی علامت منفی ہوگی اور لا + ب + ج کی علامت

نہی ہلاکت کی صورت میں

لا کی علامت سے مختلف ہوگی

صورت دوم - فرض کرو کہ ب^۲ - ۴ ج = ۰ / تو (۱) سے ظاہر ہے کہ

$$لا + ب + لا + ج = لا (لا + \frac{ب}{لا}) + ج$$

اور چونکہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے $(لا + \frac{ب}{لا})$ مثبت ہے اسلئے ثابت ہوا کہ لا + ب + لا + ج کی وہی علامت ہے جو لا کی۔

صورت سوم - فرض کرو کہ ب^۲ - ۴ ج > ۰ یعنی مساوات کی قیمتیں خیالی ہیں۔

$$جلہ لا + ب + لا + ج = لا (لا + \frac{ب}{لا}) - ۲ (ب - ۴ ج) / ۴$$

$$= لا (لا + \frac{ب}{لا}) + ۲ (ج - \frac{ب}{۴})$$

اب لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جلہ $(لا + \frac{ب}{لا}) + ۲ (ج - \frac{ب}{۴})$ - ب

مثبت ہے اسلئے جلہ لا + ب + لا + ج کی وہی علامت ہے جو لا کی۔ پس ثابت ہوا
۱۳۸ - دفعہ آخر سے ظاہر ہے کہ اگر ب^۲ - ۴ ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو تو جلہ لا + ب + لا + ج کی ہمیشہ ایک ہی علامت رہے گی خواہ لا کوئی حقیقی قیمت اختیار کرے اور اگر یہ شرط پوری ہو تو جلہ مثبت ہوگا اگر

لا مثبت ہو اور منفی ہوگا اگر لا منفی ہو۔ برعکس اس کے جلہ لا + ب + لا + ج کے ہمیشہ مثبت ہونے کے لئے ضروری ہے کہ ب^۲ - ۴ ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور لا مقدار مثبت ہو نیز لا + ب + لا + ج کے ہمیشہ منفی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ ب^۲ - ۴ ج منفی ہو یا صفر کے برابر ہو اور لا مقدار منفی ہو۔
مثال ۱ - ثابت کرو کہ اگر لا کی قیمت کا مناسب انتخاب کیا جائے تو

کسر $\frac{21+2-13}{13-14}$ جو قیمت ہم چاہیں اختیار کرنے کی قابلیت رکھتی ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ } x = \frac{21+2-13}{13-14}$$

$$\therefore 2-13 = 21+2-13 \quad (13-14)$$

$$\therefore 2-13 = 21+2-13 \quad (13+1)$$

مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$x = 1+3 \pm 9 \sqrt{20-18-21} = 20-18-21$$

اگر لامقدار حقیقی ہو تو ضرور ہے کہ $20-18-21$ مثبت ہو یعنی

$$9(2-1)(\frac{1}{9}+x) \text{ مثبت ہو}$$

ظاہر ہے کہ x کی قیمت اور جو کچھ بھی ہو صرف ۲ اور $\frac{1}{9}$ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ x کی قیمت کا مناسب انتخاب کرنے

سے کسر $\frac{21+2-13}{13-14}$ وہی قیمت قبول کر سکتی ہے جو ہم چاہیں سوائے

ان قیمتوں کے جو ۲ اور $\frac{1}{9}$ کے درمیان واقع ہوں۔

مثال ۲۔ اگر لامقدار حقیقی ہو تو ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان

x کی قیمت کا واقع ہونا ضروری ہے تاکہ جہ $\frac{5+2-1}{5-2}$ تمام قیمتیں اختیار کرنے کے قابل ہو سکے۔

$$\text{فرض کرو } x = \frac{5+2-1}{5-2}$$

$$\text{تب } (5-1)(5-2) = (5-1) + (5-2) = 5-1$$

اگر اس مساوات کی قیمتیں حقیقی ہوں تو ضروری ہے کہ

$$5-2(5-1)(5-2) = 5-1 \text{ مثبت ہو}$$

یعنی $(5-2)(5-1)(5-2) = 5-1$ مثبت ہو۔

اسلئے نتائج مندرجہ بالا کی استقامت سے ضروری ہے کہ
 $(۱+۲) - (۳۹-۱۲۰) = ۲$ منفی ہو یا صفر ہو اور $۲۰-۳۹$ مثبت ہو
 اب $(۱+۲) - (۳۹-۱۲۰) = ۲$ منفی یا صفر ہوگا
 اگر $۲ (۱-۲) - (۱۰+۲۵) \times ۲ (۱۰-۲۴)$ منفی یا صفر ہو
 یعنی اگر $۴ (۱-۵) - (۱۲+۱) (۲-۱)$ منفی یا صفر ہو
 اور یہ جملہ منفی ہے جب تک کہ ۱ کی قیمت ۲ اور ۱۲ کے درمیان واقع
 ہے اور ایسی قیمتوں کے لئے $۲۰-۳۹$ مثبت ہے
 نیز جملہ مذکورہ اس وقت صفر ہوگا جب $۱ = ۵$ یا ۱۲ یا ۲ لیکن جب
 $۱ = ۵$ تو $۲۰-۳۹$ منفی ہے۔ اسلئے ۱ کی قیمتوں کی حدود ۲ اور
 ۱۲ ہیں اور ان کے درمیان اس کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۳

- ۱۔ ایسی حدود دریافت کرو جن کے درمیان n کا واقع ہونا ضروری
 ہے تاکہ مساوات $۲ (۱+۱۱) + (۱۱+۱۱) + (۲-۲) = ۲$ کی
 دو حقیقی قیمتیں ہو سکیں۔
- ۲۔ اگر لامقدار حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{۱۱-۲}{۱۱+۱۱}$ کی قیمت ہمیشہ
 ۱ اور $\frac{۱}{۱۱}$ کے درمیان واقع ہوگی۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ ۱ کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ $\frac{۱-۱۱}{۱+۱۱}$
 کی قیمت $\frac{۱}{۱۱}$ اور $\frac{۱}{۱۱}$ کے درمیان واقع ہوگی۔
- ۴۔ اگر لاجحقی ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{۱+۱۱}{۱-۱۱}$ کی کوئی قیمت
 ۵ اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

۵۔ ایسی مساوات دریافت کرو جس کی قیمتیں $\frac{10}{100} \pm \frac{10}{100} = 1$ ہوں۔

۶۔ اگر عہ اور بہ مساوات لا۔ ف لا + ق = ۰ کی قیمتیں ہوں تو ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$(۱) عہ (عہ - ب) + ب (بہ - عہ - عہ) =$$

$$(۲) (عہ - ف) + (ب - ف) =$$

۷۔ اگر ل لا + ن لا + ن = ۰ کی قیمتوں کی باہمی نسبت ف:ق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ل}{ق} + \frac{ق}{ن} + \frac{ن}{ل} = ۰$$

۸۔ اگر ل حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ جملہ $\frac{۲(ل+م) - ۳م}{۲(ل-ن)}$ تمام قیمتیں

اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے سوائے اُن قیمتوں کے جو ۲ ن اور ۲ م کے درمیان واقع ہوں۔

۹۔ اگر مساوات لا + لا + ۲ ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں عہ اور بہ

ہوں اور مساوات لا + لا + ۲ ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں عہ + د اور بہ + د ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ب - ۲ ج}{۲} = \frac{ب - ۲ ج}{۲}$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر ل حقیقی ہو تو جملہ $\frac{۳ + لا - ۳}{۲}$ تمام قیمتیں

اختیار کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ ف کی قیمت ۱ اور ۷ کے درمیان واقع ہو۔

۱۱- لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے جملہ $\frac{۲+۱۱}{۶+۱۳+۲۱}$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

۱۲- ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{۱۱-۲}{۶-۱۳}$ کی کوئی حقیقی قیمت ب اور ج کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔ (طریقہ حقیقی)

۱۳- اگر مساوات $۱۱+۲$ ب $۱۱+۲$ ج = ۰ کی قیمتیں ممکن اور مختلف ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

$(۱+۲) (۱۱+۲) ب = (۱۱+۲) (۱۱+۲) ج$ کی قیمتیں غیر ممکن ہوں گی اور برعکس اسکے۔ یہاں ایک اور آراء جو دوسری مثال کے لئے ک

۱۴- ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو جملہ $\frac{(۱۱-۲) (۱۱-۲)}{(۱۱-۲) (۱۱-۲)}$ تمام

قیمتیں قبول کرنے کی قابلیت رکھتا ہے بشرطیکہ $۱۱-۲$ ب اور $۱۱-۲$ ج > ۰ کی ایک ہی علامت ہو۔

۱۵- دو متغیر متغیر لا اور ما کے جملہ مختص کو اکثر رمز ج (لا و ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً $۱۱+۲$ ب $۱۱+۲$ ج

اور $۱۱+۲$ ب $۱۱+۲$ ج $۱۱+۲$ ع $۱۱+۲$ ف بالترتیب درجہ اول اور درجہ دوم کے دو جملے بلحاظ لا اور ما کے ہیں۔

مساوات ج (لا) = ۰ اور ج (لا و ما) = ۰ کو مساوات درجہ اول اور درجہ دوم کہیں گے اگر انکے مقابل کے جملے ج (لا) اور ج (لا و ما) جملات درجہ اول اور درجہ دوم ہوں

۱۶- ایسی شرط دریافت کرو کہ دو متغیر متغیر لا اور ما کا جملہ مختص درجہ دوم دو اجزاء رضی درجہ اول میں تحلیل ہو سکے۔

جملہ معلومہ کو جج (لا و ما) سے تعبیر کرو جہاں

مج (لا و ما) = لا^۲ + ۲ لا ما + ما^۲ + ب ما^۲ + گ لا^۲ + ف ما + ج
اسکو لاکھ تواء نزولی کے موافق صفر کے برابر لکھو۔

$$لا + لا + ۲ لا (ہ + ما + گ) + ب ما + ۲ ف ما + ج = ۰$$

بجاء لا کے یہ مساوات درجہ دوم ہے اسکو حل کرنے سے

$$لا = - (ہ + ما + گ) \pm \sqrt{(ہ + ما + گ)^2 - ۲(ب ما + ۲ ف ما + ج)}$$

۱

$$یا لا + لا + ۲ لا (ہ + ما + گ) + ب ما + ۲ ف ما + ج = ۰$$

$$یا لا + لا + ۲ لا (ہ + ما + گ) + ب ما + ۲ ف ما + ج = ۰$$

اب اگر جملہ مج (لا و ما) دو اجزاء ضربی درجہ اول (شکل ف لا + ق ما + ر)
کا حاصل ضرب ہو تو ضروری ہے کہ علامت جذر کے اندر کی مقدار
مربع کامل ہو۔

$$\text{اسلئے (ہ گ - ف) = ۲ (ہ - ۲ اب) (گ - ۲ ج)}$$

عمل نقل اور تقسیم سے حاصل ہوا۔

$$اب ج + ۲ ف گ - ۲ ف - ب گ - ج ۲ = ۰$$

جو طالب علم مسائل مقطعات سے واقف ہے وہ بخوبی جانتا ہے کہ
اس شرط کو ہم صورت ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$۱۴۱۔ اگر مساوات درجہ دوم لا + لا + ب لا + ج = ۰$$

کی قیمتیں دی ہوں جو مساوات لا + لا + ب لا + ج = ۰ کی

ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ج}{ا} = \frac{ج}{ا} \text{ اور } \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا}$$

اگر ہر ایک مساوات کی قیمتیں عہ اور بہ سے تعبیر کی جائیں تو

$$\frac{ب}{ا} = - (عہ + بہ) = \frac{ب}{ا}$$

$$\text{اور } \frac{ج}{ا} = عہ بہ = \frac{ج}{ا}$$

ظاہر ہے کہ یہ شرائط ضروری اور کافی ہیں

۱۴۲۔ ایسی شرط دریافت کرو کہ معادلات لا + ا + ب + ج = ۰

اور لا + ا + ب + ج = ۰ کی ایک قیمت مشترک ہو۔

فرض کرو کہ لا = عہ سے دونوں مساواتوں کی شرائط پوری ہوتی

ہیں۔ تب لا + عہ + ب + ج = ۰

لا + عہ + ب + ج = ۰

۱۔ سئلے ضرب چلیپائی سے

$$\frac{ب}{ج} - \frac{ب}{ج} = \frac{عہ}{ج - لا} = \frac{ا}{ب - لا}$$

عد کو ساقط کرنے کے لئے دوسری نسبت کا مربع لا اور اس کو باقی

دونوں کے حاصل ضرب کے برابر لکھو۔

$$\frac{ب}{ج} - \frac{ب}{ج} = \frac{عہ}{ج - لا} \times \frac{ا}{ب - لا}$$

۱۔ سئلے (ج - لا) (ج - لا) = (ب - ج) (ب - ج) (ا - ب - لا)

شرط مطلوبہ ہے

نیز یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر دو جملات درجہ دوم لا + ا + ب + ج = ۰

اور $\bar{L} + \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{M}$ کا ایک جز صریبی مشترک ہو تو اس صورت میں بھی یہی شرط ضروری ہوگی۔

امثلہ نمبری ۱۴

۱۔ معلوم کر دو کہ م کی کن قیمتوں کے لئے جملہ ما^۲+لا^۲+ام^۲-۳
دو ناطق اجزاء ضروری میں تحلیل ہو سکتا ہے ؟

۲۔ اگر جلد ۲ لاء ۴ م لاء ۳ م ۵ م ۲۔ دو اجزاء ضربی درجہ اول کے حاصل ضرب کے برابر ہو تو م کی قیمتیں دریافت کرو

۴۔ ثبات کرو کہ جملہ (لا۔ ما)۔ لام (ب۔ ج) ہمیشہ دو حقیقی اجزاء ضربی درجہ اول میں تحلیل ہو سکتا ہے۔

۳۔ اگر معادلات $لا + ف لا + ق = ۰$ اور $لا + ف لا + ق = ۰$ کی ایک قیمت مشترک ہو تو ثابت کرو کہ یہ قیمت $\frac{ق - ق}{ق - ق}$ یا $\frac{ق - ق}{ق - ق}$ کے برابر ہوگی۔

۵۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ جملات ل لا + م لا + ن ما + اور ل لا + م لا + ن ما کا ایک جز فنی درجہ اول مشترک ہو

۶۔ اگر جہد ۳ لا + ۲ ف لا + ۲ م + ۲ لا - ۳ م + ۱ اجزاء ضربی
درجہ اول میں تحلیل ہو سکے تو ثابت کر دو

۴۔ ایسی بشرط معلوم کرو کہ جملات $۲ + ۲\alpha + ۲\beta + ۲\gamma + ۲\delta + ۲\epsilon + ۲\zeta + ۲\eta + ۲\theta + ۲\iota + ۲\kappa + ۲\lambda + ۲\mu + ۲\nu + ۲\xi + ۲\omicron + ۲\pi + ۲\rho + ۲\sigma + ۲\tau + ۲\upsilon + ۲\phi + ۲\chi + ۲\psi + ۲\omega$ کی ایک قیمت ہے

اور ۲ لا + ۲ ھ لا + ۲ ب ما اجزاء مغربی ۶۔ م لا
اور م + ۲ لا کی صورت کے جلوں پر بالترتیب تقسیم ہو سکیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا - ۳ لا + ۲ ما - ۲ لا - ۳ ما - ۳۵ = ۰$ میں لا کے لئے کوئی حقیقی قیمت مندرج کرنے سے ما کی ایک حقیقی قیمت حاصل ہوتی ہے اور ما کے لئے حقیقی قیمت مندرج کرنے سے لا کی حقیقی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۹۔ اگر دو حقیقی مقداروں لا اور ما کا باہمی ربط مساوات $۹ لا + ۲ لا + ۱ ما - ۲ ما - ۹۲ لا - ۲۰ ما + ۲۴۴ = ۰$ کے مطابق ہو تو ثابت کرو کہ لا کی قیمت ۳ اور ۶ کے درمیان واقع ہوگی اور ما کی ۱ اور ۱۰ کے درمیان۔

۱۰۔ اگر $(۱ لا + ۱ ب + لا + ج) + ۱ لا + ۲ ب + لا + ج = ۰$ تو ایسی شرط دریافت کرو کہ لا ایک ناطق جملہ ما کا ہو

باب دہم

مساواتیں جو مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں

۱۲۳۴۔ اگر کسی مساوات صحیح ج (لا) = ۰ کی ایک قیمت لا معلوم ہو تو ہم جانتے ہیں کہ ج (لا) = (لا - لا) ج (لا) جہاں ج (لا) کا درجہ ج (لا) سے بقدر ایک کے کم ہے اسلئے معلوم ہوا کہ مساوات مفروضہ ج (لا) = ۰ کا حل مساوات ج (لا) = ۰ کے حل پر موقوف ہے اب ایسا ممکن ہے ج (لا) = ۰ مساوات درجہ دوم ہو جس صورت میں اس کا حل حسب معمول حاصل ہو سکتا ہے

مثال ۱۔ ۱۔ کے جذور الکعب کی قیمتیں دریافت کرو

اگر ۱۔ کا جذور الکعب لا سے تغیر ہو تو لا^۲ = ۱ پس ہیں مساوات لا + ۱ = ۰ کو حل کرنا ہے اس مساوات کی ایک قیمت ہمیں معلوم ہے۔

مساوات مفروضہ ہے (لا + ۱) (لا - لا + ۱) = ۰

$$\left\{ \begin{array}{l} - = ۱ + لا \\ لا - لا + ۱ = ۰ \end{array} \right\} \text{ یعنی}$$

$$\frac{۳۲}{۲} \pm \frac{۳۲}{۲}$$

مساوات درجہ دوم کی قیمتیں ہیں

اسلئے ۱۔ کے جذور الکعب ہوئے ۱۔ اور $\frac{۳۲}{۲} \pm \frac{۳۲}{۲}$

مثال ۲۔ مساوات لا^۳ - لا^۲ + لا + ۳ = ۰ کی قیمتیں دریافت کرو

ظاہر ہے کہ لا = ۱ شرائط مساوات کو پورا کرتی ہے۔

اس لئے مساوات معلومہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے (۱-۱) (۲-۱۶-۳) = ۰

مبادات ۷ لا ۶ لا ۳ = ۰ کی قیمتیں $\frac{3.0 \pm 3}{3.0}$ ہیں

اسلئے مساوات مطلوبہ کی قیمتیں ہوئیں اور $\frac{30.8 + 3}{37.8 - 3}$

ایسا ممکن ہے کہ کسی نہ کسی طرح سے ہم مساوات صحیح کو اس صورت

..... = جہاں فاقہ میں تحلیل کر سکیں

درجہ دوم کے صحیح جملے ہوں اس صورت میں مساوات زیر بحث کی قسمیں

معاذلات ف = باقی = ر = کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثال - مساوات کے (۱) (۲) (ب + لا + ج) - ۲ - گ (د + لا + ع + لا + ف) =

کو حل کرو۔

مسافات معلومہ = { (ا ا ک) (و لا ا + ب لا ج) + (ا ا گ) (د لا ا + ع لا ف) }

$$. = \{ \text{ماک (لا + ب + ج) - گ (لا + ع + ف) } \}$$

اس لئے مطلوبہ قیمتیں معاوضات درجہ دوم

(لوہک + دہاک) لا + (بہاک + عہاک) لا + جہاک + بنہاک =

.. (۱۰۱-۱۰۲) + ۲ (۱۰۳-۱۰۴) + ۱ (۱۰۵-۱۰۶) + ۱ (۱۰۷-۱۰۸) + ۱ (۱۰۹-۱۱۰) + ۱ (۱۱۱-۱۱۲) + ۱ (۱۱۳-۱۱۴) + ۱ (۱۱۵-۱۱۶) + ۱ (۱۱۷-۱۱۸) + ۱ (۱۱۹-۱۲۰) + ۱ (۱۲۱-۱۲۲) + ۱ (۱۲۳-۱۲۴) + ۱ (۱۲۵-۱۲۶) + ۱ (۱۲۷-۱۲۸) + ۱ (۱۲۹-۱۳۰) + ۱ (۱۳۱-۱۳۲) + ۱ (۱۳۳-۱۳۴) + ۱ (۱۳۵-۱۳۶) + ۱ (۱۳۷-۱۳۸) + ۱ (۱۳۹-۱۴۰) + ۱ (۱۴۱-۱۴۲) + ۱ (۱۴۳-۱۴۴) + ۱ (۱۴۵-۱۴۶) + ۱ (۱۴۷-۱۴۸) + ۱ (۱۴۹-۱۵۰) + ۱ (۱۵۱-۱۵۲) + ۱ (۱۵۳-۱۵۴) + ۱ (۱۵۵-۱۵۶) + ۱ (۱۵۷-۱۵۸) + ۱ (۱۵۹-۱۶۰) + ۱ (۱۶۱-۱۶۲) + ۱ (۱۶۳-۱۶۴) + ۱ (۱۶۵-۱۶۶) + ۱ (۱۶۷-۱۶۸) + ۱ (۱۶۹-۱۷۰) + ۱ (۱۷۱-۱۷۲) + ۱ (۱۷۳-۱۷۴) + ۱ (۱۷۵-۱۷۶) + ۱ (۱۷۷-۱۷۸) + ۱ (۱۷۹-۱۸۰) + ۱ (۱۸۱-۱۸۲) + ۱ (۱۸۳-۱۸۴) + ۱ (۱۸۵-۱۸۶) + ۱ (۱۸۷-۱۸۸) + ۱ (۱۸۹-۱۹۰) + ۱ (۱۹۱-۱۹۲) + ۱ (۱۹۳-۱۹۴) + ۱ (۱۹۵-۱۹۶) + ۱ (۱۹۷-۱۹۸) + ۱ (۱۹۹-۲۰۰) + ۱ (۲۰۱-۲۰۲) + ۱ (۲۰۳-۲۰۴) + ۱ (۲۰۵-۲۰۶) + ۱ (۲۰۷-۲۰۸) + ۱ (۲۰۹-۲۱۰) + ۱ (۲۱۱-۲۱۲) + ۱ (۲۱۳-۲۱۴) + ۱ (۲۱۵-۲۱۶) + ۱ (۲۱۷-۲۱۸) + ۱ (۲۱۹-۲۲۰) + ۱ (۲۲۱-۲۲۲) + ۱ (۲۲۳-۲۲۴) + ۱ (۲۲۵-۲۲۶) + ۱ (۲۲۷-۲۲۸) + ۱ (۲۲۹-۲۳۰) + ۱ (۲۳۱-۲۳۲) + ۱ (۲۳۳-۲۳۴) + ۱ (۲۳۵-۲۳۶) + ۱ (۲۳۷-۲۳۸) + ۱ (۲۳۹-۲۴۰) + ۱ (۲۴۱-۲۴۲) + ۱ (۲۴۳-۲۴۴) + ۱ (۲۴۵-۲۴۶) + ۱ (۲۴۷-۲۴۸) + ۱ (۲۴۹-۲۵۰) + ۱ (۲۵۱-۲۵۲) + ۱ (۲۵۳-۲۵۴) + ۱ (۲۵۵-۲۵۶) + ۱ (۲۵۷-۲۵۸) + ۱ (۲۵۹-۲۶۰) + ۱ (۲۶۱-۲۶۲) + ۱ (۲۶۳-۲۶۴) + ۱ (۲۶۵-۲۶۶) + ۱ (۲۶۷-۲۶۸) + ۱ (۲۶۹-۲۷۰) + ۱ (۲۷۱-۲۷۲) + ۱ (۲۷۳-۲۷۴) + ۱ (۲۷۵-۲۷۶) + ۱ (۲۷۷-۲۷۸) + ۱ (۲۷۹-۲۸۰) + ۱ (۲۸۱-۲۸۲) + ۱ (۲۸۳-۲۸۴) + ۱ (۲۸۵-۲۸۶) + ۱ (۲۸۷-۲۸۸) + ۱ (۲۸۹-۲۹۰) + ۱ (۲۹۱-۲۹۲) + ۱ (۲۹۳-۲۹۴) + ۱ (۲۹۵-۲۹۶) + ۱ (۲۹۷-۲۹۸) + ۱ (۲۹۹-۳۰۰) + ۱ (۳۰۱-۳۰۲) + ۱ (۳۰۳-۳۰۴) + ۱ (۳۰۵-۳۰۶) + ۱ (۳۰۷-۳۰۸) + ۱ (۳۰۹-۳۱۰) + ۱ (۳۱۱-۳۱۲) + ۱ (۳۱۳-۳۱۴) + ۱ (۳۱۵-۳۱۶) + ۱ (۳۱۷-۳۱۸) + ۱ (۳۱۹-۳۲۰) + ۱ (۳۲۱-۳۲۲) + ۱ (۳۲۳-۳۲۴) + ۱ (۳۲۵-۳۲۶) + ۱ (۳۲۷-۳۲۸) + ۱ (۳۲۹-۳۳۰) + ۱ (۳۳۱-۳۳۲) + ۱ (۳۳۳-۳۳۴) + ۱ (۳۳۵-۳۳۶) + ۱ (۳۳۷-۳۳۸) + ۱ (۳۳۹-۳۴۰) + ۱ (۳۴۱-۳۴۲) + ۱ (۳۴۳-۳۴۴) + ۱ (۳۴۵-۳۴۶) + ۱ (۳۴۷-۳۴۸) + ۱ (۳۴۹-۳۵۰) + ۱ (۳۵۱-۳۵۲) + ۱ (۳۵۳-۳۵۴) + ۱ (۳۵۵-۳۵۶) + ۱ (۳۵۷-۳۵۸) + ۱ (۳۵۹-۳۶۰) + ۱ (۳۶۱-۳۶۲) + ۱ (۳۶۳-۳۶۴) + ۱ (۳۶۵-۳۶۶) + ۱ (۳۶۷-۳۶۸) + ۱ (۳۶۹-۳۷۰) + ۱ (۳۷۱-۳۷۲) + ۱ (۳۷۳-۳۷۴) + ۱ (۳۷۵-۳۷۶) + ۱ (۳۷۷-۳۷۸) + ۱ (۳۷۹-۳۸۰) + ۱ (۳۸۱-۳۸۲) + ۱ (۳۸۳-۳۸۴) + ۱ (۳۸۵-۳۸۶) + ۱ (۳۸۷-۳۸۸) + ۱ (۳۸۹-۳۹۰) + ۱ (۳۹۱-۳۹۲) + ۱ (۳۹۳-۳۹۴) + ۱ (۳۹۵-۳۹۶) + ۱ (۳۹۷-۳۹۸) + ۱ (۳۹۹-۴۰۰) + ۱ (۴۰۱-۴۰۲) + ۱ (۴۰۳-۴۰۴) + ۱ (۴۰۵-۴۰۶) + ۱ (۴۰۷-۴۰۸) + ۱ (۴۰۹-۴۱۰) + ۱ (۴۱۱-۴۱۲) + ۱ (۴۱۳-۴۱۴) + ۱ (۴۱۵-۴۱۶) + ۱ (۴۱۷-۴۱۸) + ۱ (۴۱۹-۴۲۰) + ۱ (۴۲۱-۴۲۲) + ۱ (۴۲۳-۴۲۴) + ۱ (۴۲۵-۴۲۶) + ۱ (۴۲۷-۴۲۸) + ۱ (۴۲۹-۴۳۰) + ۱ (۴۳۱-۴۳۲) + ۱ (۴۳۳-۴۳۴) + ۱ (۴۳۵-۴۳۶) + ۱ (۴۳۷-۴۳۸) + ۱ (۴۳۹-۴۴۰) + ۱ (۴۴۱-۴۴۲) + ۱ (۴۴۳-۴۴۴) + ۱ (۴۴۵-۴۴۶) + ۱ (۴۴۷-۴۴۸) + ۱ (۴۴۹-۴۵۰) + ۱ (۴۵۱-۴۵۲) + ۱ (۴۵۳-۴۵۴) + ۱ (۴۵۵-۴۵۶) + ۱ (۴۵۷-۴۵۸) + ۱ (۴۵۹-۴۶۰) + ۱ (۴۶۱-۴۶۲) + ۱ (۴۶۳-۴۶۴) + ۱ (۴۶۵-۴۶۶) + ۱ (۴۶۷-۴۶۸) + ۱ (۴۶۹-۴۷۰) + ۱ (۴۷۱-۴۷۲) + ۱ (۴۷۳-۴۷۴) + ۱ (۴۷۵-۴۷۶) + ۱ (۴۷۷-۴۷۸) + ۱ (۴۷۹-۴۸۰) + ۱ (۴۸۱-۴۸۲) + ۱ (۴۸۳-۴۸۴) + ۱ (۴۸۵-۴۸۶) + ۱ (۴۸۷-۴۸۸) + ۱ (۴۸۹-۴۹۰) + ۱ (۴۹۱-۴۹۲) + ۱ (۴۹۳-۴۹۴) + ۱ (۴۹۵-۴۹۶) + ۱ (۴۹۷-۴۹۸) + ۱ (۴۹۹-۵۰۰) + ۱ (۵۰۱-۵۰۲) + ۱ (۵۰۳-۵۰۴) + ۱ (۵۰۵-۵۰۶) + ۱ (۵۰۷-۵۰۸) + ۱ (۵۰۹-۵۱۰) + ۱ (۵۱۱-۵۱۲) + ۱ (۵۱۳-۵۱۴) + ۱ (۵۱۵-۵۱۶) + ۱ (۵۱۷-۵۱۸) + ۱ (۵۱۹-۵۲۰) + ۱ (۵۲۱-۵۲۲) + ۱ (۵۲۳-۵۲۴) + ۱ (۵۲۵-۵۲۶) + ۱ (۵۲۷-۵۲۸) + ۱ (۵۲۹-۵۳۰) + ۱ (۵۳۱-

کی چار قیمتیں ہیں جو ب معمول دریافت ہو سکتی ہیں

۱۴۴- فرض کرو کہ کسی مسادات کی تحویل صورت ذیل میں

ہو سکتی ہے۔

یعنی $\{ج(لا)\}^2 + ف\{ج(لا)\} + ق = .$

اگر اس میں ج (لا) کی جگہ مار رکھا جائے تو ما دریافت کرنے کے لئے

مسادات $Ma^2 + F + Ma + C =$ حاصل ہوگی۔

مساوات $ما^2 + ح + ق = ۰$ کی قیمتیں ہیں $-ف \pm \sqrt{ف^2 - ۴ماق}$

$$\left. \begin{aligned} \text{ج (لا)} &= -ف + \sqrt{ف^2 - ۴ماق} \\ \text{ج (لا)} &= -ف - \sqrt{ف^2 - ۴ماق} \end{aligned} \right\} \text{اسلئے} \quad (۱) \dots\dots$$

اب اگر ج (لا) جملہ درجہ اول یا درجہ دوم بلحاظ لا کے ہو تو (۱) کو حل کرنے سے ہمیں اصلی مساوات کی تمام قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

مثال ۱۔ $۸لا^{\frac{3}{2}} - ۸لا^{\frac{3}{2}} = ۶۳$ کو حل کرو۔
طرفین کو $لا^{\frac{3}{2}}$ سے ضرب دینے اور عمل نقل سے

$$۸لا^{\frac{3}{2}} - ۶۳لا^{\frac{3}{2}} = ۸$$

$$\text{اسلئے} \quad ۰ = (۸لا^{\frac{3}{2}} - ۶۳لا^{\frac{3}{2}})$$

$$\text{یعنی} \quad ۸لا^{\frac{3}{2}} = ۶۳لا^{\frac{3}{2}} \quad \text{یا} \quad ۸ = ۶۳لا^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{یا} \quad ۸ = ۶۳لا^{\frac{3}{2}} \quad \text{یا} \quad ۸ = ۶۳لا^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{یا} \quad ۸ = ۶۳لا^{\frac{3}{2}} \quad \text{یا} \quad ۸ = ۶۳لا^{\frac{3}{2}}$$

مثال ۲۔ $۷۲ - ۷۲ + ۲ \times ۳ = ۳۲$

یہ مساوات صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہے

$$۰ = ۳۲ - (۷۲) + ۲ \times ۳$$

$$\text{یعنی} \quad ۰ = (۷۲ - ۳۲) + ۲ \times ۳$$

$$\text{اسلئے} \quad ۸ = ۷۲ \quad \text{یا} \quad ۳ = ۷۲$$

پہلی مساوات کی ایک حقیقی قیمت $لا = ۲$ ہے اور دوسری کی $لا = ۳$

مثال ۳۔ $۲لا^{\frac{1}{2}} + ۳لا^{\frac{1}{2}} = \frac{۷}{۲}$ کو حل کرو

اگر $ما = لا + (۲ + ۳ ب) + لا + (۱ + ۳ اب)$ تو مساوات بالا کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$ما = (۲ + ۳ ب) + ج$$

$$یعنی \quad ما + ۲ ب + ۳ اب = ج + ج$$

$$اسلئے \quad ما = ج - ۲ ب - ۳ اب$$

اسلئے اصلی مساوات کا حل مساوات

$$لا + (۲ + ۳ ب) + لا + ۱ + ۳ اب + ب = ج + ج - ۲ ب - ۳ اب$$

پر موقوف ہے۔

۱۴۵۔ اگر کوئی مساوات صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہو یعنی

$$لا + ب + لا + ج + ف = ما + لا + ب + لا + ج = ق$$

تو اس کا حل اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔

$$فرض کرکہ ما = ما + لا + ب + لا + ج$$

$$تب \quad ما + ف - ق = ۰$$

اگر عہ اور بہ اس مساوات کی قیمتیں ہوں تو

$$ما + لا + ب + لا + ج = عہ اور ما + لا + ب + لا + ج = بہ$$

ان مساواتوں سے ہمیں لا کی ۴ قیمتیں حاصل ہوں گی۔

علامت جذر کے ماقبل جب کوئی علامت نہ ہو تو عموماً علامت مثبت

کو متعرف خیال کرتے ہیں۔ اسلئے اگر عہ اور بہ دونوں مثبت ہوں تو

لا کی چاروں قیمتیں اصلی مساوات کی شرائط کو پورا کریں گی اگر عہ اور بہ

میں سے ایک بھی منفی ہو تو اس سے جو مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی اس کی قیمتیں

$$لا + ب + لا + ج - ف = ما + لا + ب + لا + ج = ق$$

کے موافق ہوں گی

لیکن اصلی مساوات کی شرائط کو پورا نہیں کر نیگی۔

مثال ۱۔ $\sqrt{5-2\sqrt{3+5\sqrt{2}}}$ کو حل کرو
طرفین پر ۳ زیادہ کرنے سے

$$\sqrt{5-2\sqrt{3+5\sqrt{2}}} + 3 = \sqrt{8+5\sqrt{2}}$$

اب فرض کرو کہ $\sqrt{8+5\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{5}$

تب $3 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$ جس سے $3 = 3$ یا $5 = 5$

$$\sqrt{8+5\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{8+5\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{5}$$

یا ان مساواتوں کا مربع لینے اور حل کرنے سے ہمیں مساوات اول سے

$$\sqrt{8+5\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{5}$$

حاصل ہوگا $3 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$ اور مساوات دوم سے $\pm 5 = \pm 5$

پہلی دو قیمتیں مساوات معلومہ کو پورا کرتی ہیں مگر دوسری دو مساوات

$$\sqrt{5-2\sqrt{3+5\sqrt{2}}} = 3 + \sqrt{5}$$

مثال ۲۔ مساوات $\sqrt{5-2\sqrt{3+5\sqrt{2}}} = 3 + \sqrt{5}$ کو حل کرو

طرفین پر ۱۸ زیادہ کرنے سے $\sqrt{5-2\sqrt{3+5\sqrt{2}}} + 18 = \sqrt{21+5\sqrt{2}}$

$$\sqrt{21+5\sqrt{2}} = 18 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{21+5\sqrt{2}} = 18 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{21+5\sqrt{2}} = 18 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{21+5\sqrt{2}} = 18 + \sqrt{5}$$

اب ہمیں دو معادلات درجہ دوم حل کرنی ہیں۔ پہلی سے ہمیں حاصل

$$\sqrt{21+5\sqrt{2}} = 18 + \sqrt{5}$$

اسلئے اس کی قیمتیں صفر، $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ اور $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ہیں
اب ضروری ہے کہ جو قیمتیں جز ضربی $\{\sqrt{a} - \sqrt{b}\}^2$ $\{\sqrt{a} - \sqrt{b}\}^2$ کے
فریہ مساوات میں شامل ہوئی ہوں $\pm (\sqrt{a} + \sqrt{b})$ اور $\pm (\sqrt{a} - \sqrt{b})$
ہوں۔

معلوم ہوا کہ تینوں قیمتیں صفر، $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ اور $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ہر ایک مساوات مجوزہ
کی مطلوب قیمتیں ہیں اور ان میں سے ہر ایک مساوات مجوزہ
کو پورا کرتی ہے۔

$$\text{مثال ۲-} \quad \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}} \dots (۱)$$

نسب نمائوں کو ناطق بنانے سے

$$(۲) \quad \sqrt{a} = \frac{\{\sqrt{a} + \sqrt{b}\} - \{\sqrt{a} - \sqrt{b}\}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\{\sqrt{a} - \sqrt{b}\} - \{\sqrt{a} + \sqrt{b}\}}{\sqrt{a}}$$

طرفین کو لا سے ضرب دینے اور ارقام ناطقہ کو ایک طرف لانے سے
حاصل ہوگا۔

$$(۳) \quad \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

(۳) کا مربع لینے اور عمل نقل سے

$$(۴) \quad \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \dots (۴)$$

(۴) کا مربع لینے اور عمل نقل سے مساوات صحیح حاصل ہوگی۔

$$(۵) \quad \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \dots (۵)$$

(۵) کی قیمتیں ہیں صفر (چار دفعہ تکرار اس تکرار سے ہمیں فی الحال کچھ
مطلب نہیں) اور $\pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ظاہر ہے کہ لا = . مساوات (۱) کی ایک قیمت ہے۔

طرفین کا مربع لینے سے معلوم ہوگا کہ $\sqrt{\frac{3m}{2} \pm 1} = \frac{3m}{2} \pm \frac{1}{2}$ پس $\sqrt{\frac{3m}{2} \pm 1}$ مساوات (۱) کی قیمتیں ہونگی

$$اگر \quad 1 = \frac{\sqrt{3m \pm 2}}{\sqrt{3m \pm 3}} + \frac{\sqrt{3m \mp 2}}{\sqrt{3m \mp 3}}$$

$$یعنی اگر \quad 1 = \frac{\sqrt{3m \pm 3} + \sqrt{3m \mp 3}}{3-9}$$

اور یہ درست ہے پس معلوم ہوا کہ مساوات (۵) کی تمام قیمتیں مساوات (۱) کی قیمتیں ہیں

$$\text{مثال ۳-} \quad \frac{\sqrt{m(1-4)}}{\sqrt{m(1-4)} - 1} = \frac{\sqrt{m(1+4)}}{\sqrt{m(1+4)} + 1} \quad (۱) \dots\dots\dots$$

مثال ۳ کے مطابق مساوات (۱) پر عمل کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$(۲) \dots\dots\dots = ۴ - ۳ \sqrt{۲} \sqrt{۲} = ۱$$

(۲) کی قیمتیں ہیں صفر اور $\pm \sqrt{\frac{3m}{2}}$ مگر قاعدہ آزمائش سے معلوم ہوگا کہ ان میں سے کوئی بھی اصلی مساوات کو پورا نہیں کرتی۔

$$\text{مثال ۴-} \quad \sqrt{m(2-4-5)} + \sqrt{m(2-4-1)} = \sqrt{m(2-4-5)} + \sqrt{m(2-4-1)}$$

$$(۱) \dots\dots\dots = \sqrt{m(2-4-5)} + \sqrt{m(2-4-1)}$$

عمل نقل سے

$$\sqrt{m(2-4-5)} - \sqrt{m(2-4-1)} = \sqrt{m(2-4-5)} - \sqrt{m(2-4-1)}$$

$$\sqrt{m(2-4-5)} - \sqrt{m(2-4-1)} = \sqrt{m(2-4-5)} - \sqrt{m(2-4-1)}$$

طرفین کا مربع لینے سے $3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$$3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$\text{یعنی } (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

(۲) کا مربع لینے اور عمل نقل سے $1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2$

$$0 = (1 + \lambda)(1 - \lambda + \lambda^2)$$

اسلئے (۳) کی قیمتیں ہوئیں 1 اور $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

اب $\lambda = 1$ مساوات (۱) کو پورا کرتی ہے اور ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں

کہ باقی دو قیمتیں مساوات (۱) کو پورا نہیں کرتیں کیونکہ اگر $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

تو $\lambda^2 - 1 = 0$ اسلئے $\lambda^2 = 1$ ، اب λ کی یہ قیمت استعمال کرنے

سے مساوات (۱) مساوات $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$ میں

تحویل ہو سکتی ہے جس سے $1 - 3\lambda + 2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2$ اور $\lambda = 1$

اس مساوات کی ایک قیمت ہے مگر $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ میں سے کوئی بھی

اس کو پورا نہیں کرتی۔

مثال ۵۔ $2 = \frac{1 - (\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 - 1) + 1} = \frac{1 - (\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 - 1) + 1}$

دائیں طرف کے شمار کنندہ اور سب نما دونوں کو $1 - (\lambda^2 - 1)$ سے اور بائیں

طرف کے شمار کنندہ اور سب نما دونوں کو $(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1)$ سے

مضرب دینے سے حاصل ہوگا۔

$$2 = \frac{(\lambda^2 - 1) - 1}{(\lambda^2 - 1) - 1}$$

ارقام ہیں انکے سر یا تو باہم مساوی ہیں یا دوسری اور چوتھی انعام کے سر مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں۔ ایسی مساواتوں کو معادلات متکافیه کہتے ہیں۔

لاپہر تقیم کرنے سے معادلات (۱) اور (۲) صور ذیل میں لکھی جاسکتی ہیں

$$(۱) \quad (لا + \frac{۱}{لا}) + ب + (لا + \frac{۱}{لا}) + ج = ۰ \quad (۲)$$

$$(۲) \quad (لا + \frac{۱}{لا}) + ب + (لا - \frac{۱}{لا}) + ج = ۰ \quad (۳)$$

$$(۳) \quad (لا + \frac{۱}{لا}) + ب + (لا + \frac{۱}{لا}) + ج = ۱۲ \quad (۴)$$

$$(۴) \quad (لا + \frac{۱}{لا}) + ب + (لا - \frac{۱}{لا}) + ج = ۱۲ \quad (۵)$$

(۳) اور (۴) بالترتیب بلحاظ لا + $\frac{۱}{لا}$ اور لا - $\frac{۱}{لا}$ کے معادلات درجہ

دوم ہیں

اگر مساوات (۳) کی قیمتیں عہ اور بدہوں اور مساوات (۴) کی جد اوہم

$$\left\{ \begin{array}{l} عہ = لا + \frac{۱}{لا} \\ بدہ = لا + \frac{۱}{لا} \end{array} \right\} \text{ تو مساوات (۳) سے حاصل ہوگا}$$

$$(۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} لا - عہ = ۱ + لا \\ لا - بدہ = ۱ + لا \end{array} \right\} \text{ یعنی}$$

اسی طرح عمل کرنے سے (۴) سے حاصل ہوگا

$$(۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} لا - جدہ = ۱ - لا \\ لا - مہ = ۱ - لا \end{array} \right\}$$

پس معادلات درجہ دوم (۳) کی چار قیمتیں مساوات درجہ چہام (۱) کی قیمتیں ہیں اور (۴) کی چار قیمتیں مساوات (۲) کی قیمتیں ہیں

مساوات متکافی کی تعمیم

اگر مساوات $لا + ب لا + ج لا + د لا + ر =$ پر اُسی قسم کا عمل کیا جائے جیسا (۱) اور (۲) پر کیا تو اس کی تحویل صورت ذیل میں ہوگی۔

$$۱) (لا + ب لا) + ج =$$

اب فرض کر دو کہ $\frac{۲}{ب} = \frac{۱}{لا}$ تو یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے۔

$$۱) (لا + ب لا) + ج = ۲ - ج$$

جو بلحاظ لا + ب لا کے مساوات درجہ دوم ہے۔

نتیجہ صریح - یہ بات قابل توجہ ہے کہ ذیل کی معادلات متکافیہ درجہ پنجم مساوات متکافی درجہ چہارم میں تحویل ہو سکتی ہیں اور اسلئے مساوات درجہ دوم کی طرح حل ہو سکتی ہیں۔ یعنی

$$۱) لا + ب لا + ج لا + د لا + ر =$$

اس میں علامات مشتبہ میں سے اوپر کی علامات اکٹھی اور نیچے کی اکٹھی لینی چاہئیں

مساوات مندرجہ بالا اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$۱) (لا + ب لا) + ج لا + د لا + ر =$$

جس سے ظاہر ہے کہ لا + ۱ یا لا - ۱ دائیں طرف کا جز ضربی ہے۔ اس جز ضربی کو دور کرنے سے یہ مساوات درجہ پنجم مساوات متکافی درجہ چہارم ہو جاتی ہے اور اسے ہم حل کر سکتے جیسا اوپر بیان ہوا

مثال ۱۔ مساوات ۱۲ لا - لا۵۶ + لا۸۹ - لا۵۶ + لا۱۲ = کو حل کرو۔
لا پر تقسیم کرنے اور ترتیب دینے سے

$$۱۲ (لا + \frac{۱}{لا}) - (لا + \frac{۱}{لا}) ۵۶ = ۸۹ + ۰$$

$$\text{فرض کرو کہ } لا = \frac{۱}{لا} \text{ تب } ۱۲ - ۵۶ = \frac{۱}{لا} - ۰$$

$$\therefore ۱۲ (۱ - ۵۶) = \frac{۱}{لا} - ۰$$

$$\text{جس سے حاصل ہوا } ۱۲ = لا + \frac{۱}{لا} = ۵۶ \text{ یا } \frac{۱۳}{۴}$$

$$\text{ان مساواتوں کو حل کرنے سے } لا = ۲, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}$$

مثال ۲۔ ۱ + کے پانچویں جذر کی قیمتیں دریافت کرو

ہمیں مساوات لا = ۱ + یعنی لا - ۱ = ۰ حل کرنی ہے اس مساوات کی تحلیل ان دو مساواتوں میں ہو سکتی ہے۔

$$\left\{ \begin{array}{l} لا - ۱ = ۰ \\ لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰ \end{array} \right.$$

دوسری مساوات مساوات متکافی درجہ چہارم ہے اور اسکو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$۰ = ۱ - (لا + \frac{۱}{لا}) + (لا + \frac{۱}{لا})^۲$$

اس مساوات کو بلحاظ لا + \frac{۱}{لا} کے حل کرنے سے حاصل ہوا

$$لا + \frac{۱}{لا} = \frac{لا^۲ + ۱}{لا}$$

$$\text{اور } لا + \frac{۱}{لا} = \frac{لا^۲ - ۱}{لا}$$

ان قیمتوں سے دو معادلات درجہ دوم حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$لا^۲ + \frac{لا^۲ + ۱}{لا} = ۱ + لا$$

$$\text{اور } لا^۲ + \frac{لا^۲ - ۱}{لا} = ۱ + لا$$

ان مساواتوں سے لاکھ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی - $\frac{512-1024}{3} \pm x$ $\frac{512+1024}{3} \pm x$

مندرجہ بالا چار قیمتیں اور ایک + ۱ کے پانچوں جذر کی پانچ قیمتیں ہیں
مثال ۳ - $(1+2)^2 + (2+3)^2 = 1^2 + (3-2)^2$
اس مساوات کو ہم بصورت ذیل لکھ سکتے ہیں یعنی
 $(1+2)^2 + (2+3)^2 = 1^2 + (3-2)^2$
(۱ + ۲) پر تقسیم کرنے سے

$$\left\{ 1 - \frac{1+2}{3} \right\}^2 = 1 + \left(\frac{1+2}{3} \right)^2$$

یا $1 + 1 = 2(1-1/3)$ جہاں $\frac{1+2}{3} = 1$
یہ مساوات بلحاظ ما کے مشکافی ہے اور اس طرح لکھی جاسکتی ہے
 $0 = \frac{35}{8} + (1/4 + 1) \frac{16}{8} - 2(1/4 + 1)$
اسلئے $\frac{5}{4} = 1 + 1/4$ یا $\frac{6}{4} = 1 + 1/4$

ان مساواتوں سے حاصل ہوا $2 = 1$ یا $1/4$ اور $\frac{152}{8} \pm 4$
پس ہمیں چار مساواتیں حاصل ہوئیں

$$\frac{152}{8} \pm 4 = \frac{1+2}{3} \text{ اور } \frac{1}{4} = \frac{1+2}{3}, 2 = \frac{1+2}{3}$$

ان سے لاکھ چار قیمتیں حاصل ہونگی۔ حقیقی قیمتیں $1 = 2 - 1$ اور $2 = 1$
لا = ب - ۱۲ ہیں۔

مثال ۴ - مساوات $6 - 25 - 12 + 25 + 6 = 0$ کو حل کر

جواب $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

مثال ۵۔ حل کرو $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

جواب $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

۱۴۸۔ معادن مقادیر مجہول شامل کرنے سے ہم ایک مجہول کی مسادات اہم کے حل کو ہمیشہ ایک یا ایک سے زیادہ مجہولوں کی ناطق مسادات کے حل پر موقوف کر سکتے ہیں مثلاً اگر

$$d = \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c} + \sqrt{a+d}$$

اور اگر ہم فرض کریں کہ $\sqrt{a+b} = u$ ، $\sqrt{a+c} = v$ ، $\sqrt{a+d} = w$ ، $\sqrt{a+b} = u$ ، $\sqrt{a+c} = v$ ، $\sqrt{a+d} = w$ ، تو ہمیں مفصلہ ذیل ناطق معادلات کا نظام حاصل ہوگا۔

$$u + v + w = d, \quad u + v = e, \quad u + w = f, \quad v + w = g$$

یہ کسی خاص مثال کے خاص حالات پر منحصر ہے کہ اس قسم کی تحویل مسادات کے حل کو آسان بنادے۔ مثال ذیل میں یہ ترکیب کامیابی سے استعمال کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

ہم مسادات مفروضہ کو یوں لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right\} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{x} \left\{ 1 + \frac{y+z}{yz} \right\} \frac{1}{y} = 1 + \frac{y+z}{yz}$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{y+z}{yz} \right) = 1$$

تو معلوم ہوا کہ $\frac{1}{(1+2)} = 1 + 2$ اس مساوات سے حاصل ہوا $\frac{1}{(1+2)} = 1 + 2$ جو مساوات متکافی درجہ چہارم ہے۔ اور حسب معمول مساوات درجہ دوم کی وساطت سے حل ہو سکتی ہے۔

جب ماکہ قیمت اس طرح حاصل ہو گئی تو مساوات $\frac{1}{1+2} = 1 + 2$ سے لاکہ قیمت دریافت ہو سکتی ہے

۱۴۹۔ اب ہم چند متفرق سوالات ایسی مساوات کے حل کر چکے جو مساوات درجہ دوم کی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں اکثر اس قسم کی مساواتیں طرح طرح کی حکمتوں اور ترکیبوں سے حل ہوتی ہیں اور ان پر طالب علم کا عبور کرنا مشق اور تجربہ پر موقوف ہے۔
مثال ۱۔ حل کرو۔

$$1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 10 \quad (1)$$

از روئے تطابق

$$(1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9) = 10 \quad (2)$$

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 10 \quad (3)$$

اب (۲) مساوات متماثل ہے اسلئے لاکہ تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے لیکن مساوات (۱) کو لاکہ خاص خاص قیمتیں پورا کرتی ہیں اسلئے مساوات (۳) کو بھی صرف لاکہ وہی خاص قیمتیں پورا کریں گی۔
(۱) اور (۳) کو جمع کر لے سے

$$1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = 10$$

جس سے $\frac{5}{3} = 3$ یا $\frac{5}{3} - 3 = 0$
 مثال ۲۔ مساوات $\frac{5}{3} - 3 = 0$ کو حل کرو
 یہ مساوات صورت ذیل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{5}{3} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{5}{3} - \frac{9}{3} = 0 \Rightarrow \frac{5-9}{3} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{3} = 0$$

$$\text{اسلئے } \frac{-4}{3} = 0 \Rightarrow -4 = 0 \times 3 \Rightarrow -4 = 0$$

$$\text{علامت مثبت لینے سے } -4 = 0 \Rightarrow 4 = 0$$

$$\therefore \frac{4}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow 1 = 0$$

$$\text{علامت منفی لینے سے } -4 = 0 \Rightarrow -4 = 0$$

$$\text{اس سے } \frac{4}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow 1 = 0$$

مثال ۳۔ فرض کرو کہ

$$(1) \quad \frac{(ج + ۹) ۹}{ج ۸} = \frac{ج + ۹ + ۲(ج - ۹)}{ج - ۹ - ۲(ج - ۹)}$$

ترکیب اور تفصیل نسبت سے

$$\frac{ج ۹ + ۸۱}{ج ۹} = \frac{ج + ۹ + ۲(ج - ۹)}{ج - ۹ - ۲(ج - ۹)}$$

طرفین کا مربع لیا اور دائیں طرف کو مختصر کر دیا تو حاصل ہوگا۔

$$(2) \quad \frac{۲(ج ۹ + ۸۱)}{۲(ج + ۹)} = \frac{ج + ۹}{ج - ۹}$$

دوبارہ ترکیب اور تفصیل نسبت سے

$$\frac{۲(ج + ۹) + ۲(ج ۹ + ۸۱)}{۲(ج + ۹) - ۲(ج ۹ + ۸۱)} = \frac{ج}{ج}$$

$$\frac{2(ج + لا ۹) + 2(ج ۱۷ + لا ۹)}{(ج ۱۸ + لا ۱۸)} =$$

$$= 2ج ۱۷ - لا ۱۸ - ج ۱۷ = 2ج ۱۷ - لا ۱۸$$

$$ج ۱۷ - لا ۱۸ = 2ج ۱۷ - لا ۱۸$$

مثال ۴۔ فرض کرو کہ $\sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷} = \sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷} + \sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷}$ عمل نقل سے

$$\sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷} = \sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷} - \sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷}$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$\frac{2ج ۱۷ - لا ۱۸}{(لا ۱۸ - ج ۱۷)} = \frac{2ج ۱۷ - لا ۱۸}{(لا ۱۸ - ج ۱۷)}$$

(لا ۱۸ - ج ۱۷) پر تقسیم کرنے سے

$$\sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷} = \sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷} + \sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷}$$

مربع کرنے سے

$$(لا ۱۸ - ج ۱۷) ۱۶ = (لا ۱۸ - ج ۱۷) 2(لا ۱۸ - ج ۱۷)$$

$$2(لا ۱۸ - ج ۱۷) = 2(لا ۱۸ - ج ۱۷) = 2(لا ۱۸ - ج ۱۷)$$

$$2(لا ۱۸ - ج ۱۷) = (لا ۱۸ - ج ۱۷) 2(لا ۱۸ - ج ۱۷)$$

$$\frac{لا ۱۸ - ج ۱۷}{(لا ۱۸ - ج ۱۷)} = لا$$

نیز جز ضربی $\sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷}$ سے جسکو ہم نے اثنائے عمل میں دور کیا تھا $\frac{1}{\sqrt{لا ۱۸ - ج ۱۷}} = لا$

اس مثال سے ظاہر ہے کہ ایسی مساواتوں میں مربع لینے سے پیشتر طالب علم کو مساوات کے دونوں طرف ارقام مساوات کو اس طرح ترتیب دینا چاہیئے کہ ناطق ہونے پر اکثر ارقام ایک دوسرے کو نابود کر دیں۔ اس مثال میں اگر ہم طرفین کا اصلی حالت میں مربع لیتے تو کوئی رقم غائب نہ ہوتی لیکن مربع لینے سے پیشتر دو رقموں کو منتقل کرنے سے - لا طرفین سے خارج ہو گیا۔

امثلہ نمبری ۱۵

معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲$$

$$۵ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad ۲ - ۳ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۴ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۵ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۶ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۷ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۸ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۹ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۱۰ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۱۱ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ۱۲ = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲$$

$$۳ + ۲ = ۱ + ۳ \times ۲ = ۵ \quad ۲ = ۵ \quad ۳ = ۵ \quad ۴ = ۵ \quad ۵ = ۵ \quad ۶ = ۵ \quad ۷ = ۵ \quad ۸ = ۵ \quad ۹ = ۵ \quad ۱۰ = ۵ \quad ۱۱ = ۵ \quad ۱۲ = ۵$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{۲ - ۱}{۲ + ۱} = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۲ - ۱ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۳ - ۲ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۴ - ۳ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۵ - ۴ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۶ - ۵ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۷ - ۶ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۸ - ۷ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۹ - ۸ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۱۰ - ۹ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۱۱ - ۱۰ = \frac{۵ + ۵}{۵} \quad ۱۲ - ۱۱ = \frac{۵ + ۵}{۵}$$

$$۲۲ \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳} \sqrt{۱۷} + \frac{۳}{۵} \sqrt{۱۵} \quad ۲۲ \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳} \sqrt{۱۷} + \frac{۳}{۵} \sqrt{۱۵}$$

$$۲ \frac{۱}{۴} = \frac{۵-۱}{۵} \sqrt{۱۷} + \frac{۵-۱}{۵} \sqrt{۱۵} \quad ۲ \frac{۱}{۴} = \frac{۵-۱}{۵} \sqrt{۱۷} + \frac{۵-۱}{۵} \sqrt{۱۵}$$

$$۵ \times ۳۲ = ۱ + ۸ + ۲۲ - ۱۱ \quad ۲۶ = (۵ + ۵) ۵ \quad ۲۶ = (۵ + ۵) ۵$$

$$۲ = \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲} \quad ۲ = \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲}$$

$$۱۶۸۰ = (۱+۷)(۵+۷)(۳-۷)(۷-۷) \quad -۱۳$$

$$۳۸۵ = (۵+۷)(۷-۷)(۳-۷)(۹+۷) \quad -۱۴$$

$$۶۳ = (۳-۷۲)(۲-۷)(۱+۷۲)۷ \quad -۱۵$$

$$۹۱ = (۵+۷۲)(۹-۷)(۷-۷۲) \quad -۱۶$$

$$۵۱ = (۱۸+۷)(۱۳+۷)(۸+۷)(۳+۷) \quad -۱۷$$

$$۱۸ = \sqrt{۷-۷۲۳-۷۲۳} + ۷۲۳-۷۲۳ \quad -۱۸$$

$$۷۱۶ = \sqrt{۳۱+۷۱۶-۷۲۳} ۳+۷-۷۲۳ \quad -۱۹$$

$$\frac{۲(۱+۷)}{۳} = \sqrt{۳+۷۵-۷۲۳} + \frac{۲-۷۳}{۲} \quad -۲۰$$

$$\left(\sqrt{\frac{۷}{۷}} + \frac{۸}{۷} \right) = \frac{\sqrt{۱+۷۸-۷۲۳}}{۷} - ۷۷ \quad -۲۱$$

$$= \sqrt{۱-۷۴-۷۲۳} - \sqrt{(۷+۷۷-۷۲۳)۳} + \sqrt{۷-۷۵+۷۲۳} \quad -۲۲$$

$$\sqrt{۷۹-۷۷۳+۷۲۳} = \sqrt{۷۴-۷۷+۷۲۳} - \sqrt{۷۳-۷۷۲+۷۲۳} \quad -۲۳$$

$$\sqrt{۱۱-۷۲۱+۷۲۳} = \sqrt{۱-۷۲} ۳ + \sqrt{۷+۷۹-۷۲۳} \quad -۲۴$$

$$۱ = \sqrt{۹-۷۵+۷۲۳} - \sqrt{۲-۷۵+۷۲۳} \quad -۲۵$$

$$۱ = \sqrt{۷+۷۹-۷۲۳} - \sqrt{۱+۷۷-۷۲۳} \quad -۲۶$$

$$۵-۷ = \sqrt{۵-۷۷-۷۲۳} - \sqrt{۳۰-۷۷-۷۲۳} \quad -۲۷$$

$$۷۳+۷۲۳ = ۱+۷\frac{۸}{۹}+۷ \quad -۲۸$$

$$۷۲ = (۷+۷)۳-۱+۷ \quad -۲۹$$

$$= ۷۵۲ + (۱-۷)۷۴۳ - (۱+۷)۱۰ \quad -۳۰$$

$$= ۷+۷+۷+۷+۷+۷+۷+۷+۷+۷ \quad -۳۱$$

$$\begin{aligned}
 -۳۲ & \quad ۱۱\alpha^3 + \beta\alpha^2 - \beta\alpha - ۱ = ۰ \\
 -۳۳ & \quad ۱۱\alpha^4 + \beta\alpha^3 - \beta\alpha^2 - ۱ = ۰ \\
 -۳۴ & \quad ۱۱\alpha^2 + ۱۲\alpha + \beta\alpha^2 + \beta\alpha^2 - ج^2 = ۰ \\
 -۳۵ & \quad ۱۲\alpha^4 + ۱۳\alpha^3 - ۱۳\alpha^2 - ۱۲\alpha - ۱ = ۰ \\
 -۳۶ & \quad \text{ثابت کرو کہ مساوات درجہ چہارم } ۱۱\alpha^4 + \beta\alpha^3 + \beta\alpha^2 + ج\alpha + د = ۰ \\
 & \quad \text{مساوات درجہ دوم کی وساطت سے حل ہو سکتی ہے بشرطیکہ} \\
 & \quad \frac{\beta}{۱۲} = \frac{۱۳}{۲} \text{ اور } \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \\
 & \quad \text{معادلات ذیل کو حل کرو}
 \end{aligned}$$

$$-۳۷ \quad \frac{۱ + \sqrt{۱۲}}{۱ - \sqrt{۱۲}} = \frac{\sqrt{۱۲} - ۱}{\sqrt{۱۲} + ۱}$$

$$-۳۸ \quad \frac{۵}{۱} = \frac{\sqrt{۱۲} - ۱}{\sqrt{۱۲} + ۱}$$

$$-۳۹ \quad \frac{۵}{۲} = \frac{\sqrt{۱۲} - ۱}{\sqrt{۱۲} + ۱}$$

$$-۴۰ \quad \frac{۱ + \sqrt{۱۲}}{۱ - \sqrt{۱۲}} = \frac{۱ + \sqrt{۱۲}}{۱ - \sqrt{۱۲}}$$

$$-۴۱ \quad \frac{۱}{۳} (۱۲ - ۱) = \frac{۲}{۳} (۱ - ۱) + \frac{۲}{۳} (۱ + ۱)$$

$$-۴۲ \quad ۱۱\alpha^4 + ۱۲\alpha^3 - ۱۳\alpha^2 - ۱۲\alpha - ۱ = ۰$$

-۱۵۰ اب ہم دو مقادیر مجہول کی ہمزاد مساواتوں پر غور کریں گے
ان میں سے بعض مساوات درجہ دوم کی وساطت سے حل ہو سکتی ہیں

$$\text{مثال ۱- حل کرو } ۱۱\alpha^4 + ۱۲\alpha^3 - ۱۳\alpha^2 - ۱۲\alpha - ۱ = ۰$$

$$۷۴۱ = (۳+۱)(۲+۱) + ۲(۳+۱) + ۲(۲+۱)$$

فرض کر دو کہ $۲+۱ = و$ اور $۳+۱ = ه$ تب

$$(۱) \dots\dots\dots ۳۹ = \sqrt{۱۰} + و + ه$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۷۴۱ = و^۲ + ه^۲$$

اگلے (۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا -

$$(۳) \dots\dots\dots ۱۹ = \sqrt{۱۰} - و + ه$$

(۱) اور (۳) سے $۲۹ = و + ه$

$$اور \sqrt{۱۰} = و یا ه = ۱۰$$

جس سے $۲۵ = و$ یا $۴ = ه$

پس $۲۳ = و$ یا $۲ = ه$

$$(۱) \dots\dots\dots ۸۲ = و^۲ + ه^۲ \quad \text{مثال ۲- حل کر دو}$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۲ = و - ه$$

فرض کر دو کہ $و + د = ه$ اور $و = ه - د$

تب مساوات (۲) سے حاصل ہوگا $۱ = د$

ہ کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

$$۸۲ = (۱+د)^۲ + (۱-د)^۲$$

$$\therefore ۸۲ = (۱+۴+د^۲) + (۱-۴+د^۲)$$

$$۰ = د^۲ - ۳ \quad \text{یعنی}$$

$$د^۲ = ۳ \quad \text{جس سے} \quad و = ۱ \pm \sqrt{۳} \quad \text{اور} \quad ه = ۱ \pm \sqrt{۳}$$

$$\text{پس} \quad و = ۱ + \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad و = ۱ - \sqrt{۳}$$

$$\text{اور} \quad ه = ۱ + \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad ه = ۱ - \sqrt{۳}$$

اسلئے $م = ۱ یا ۳ یا ۴$

(۸) فرض کرو کہ $م = ۱$ مساوات (۱) یا (۲) میں $م$ کی یہ قیمت مندرج کرو مساوات (۲) سے $لا = ۱$ اس لئے $لا = ۱$ (۱) سے (۲) سے

اور $ما = م = لا = لا = ۱$ (۱) سے (۲) سے

(ب) فرض کرو کہ $م = ۳$ ، مساوات (۲) میں یہ قیمت رکھنے سے

$لا = ۱$ اس لئے $لا = \frac{۳}{۵}$

اور $ما = م = لا = لا = ۳$ $\frac{۳}{۵}$

(ج) فرض کرو کہ $م = ۴$ تو

$لا = ۱$ اس لئے $لا = \frac{۴}{۱۰}$

اور $ما = م = لا = لا = ۴$ $\frac{۴}{۱۰}$

اسلئے مکمل حل یہ ہے

$لا = ۱$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۱۰}$ (۱) سے (۲) سے

$ما = ۱$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۴}{۱۰}$ (۱) سے (۲) سے

نوٹ - اگر مساواتیں متجانس اور ایک ہی درجہ کی ہوں تو طریق بالا کی مدد سے حل ہمیشہ آسانی حاصل ہو سکے گا۔

مثال ۵ - حل کرو $۳ لا + ۲ ما = ۷$ ، $لا + ۳ ما = ۱۱$ ، $لا + ما = ۶$ (۱) ... (۲)

$لا = ۷$ ، $لا + ما = ۶$ (۲) ... (۳)

(۲) سے $۸ = لا - ۷ لا + ۳ ما$

اسکو مساوات (۱) میں مندرج کرنے سے

$۳ لا + ۷ ما + ۳ لا + ۳ ما = ۱۱ + ۷ لا + ۳ ما$ (۱) سے (۲) سے

$\therefore ۳ لا + ۷ ما + ۳ لا + ۳ ما = ۱۱ + ۷ لا + ۳ ما$ (۱) سے (۲) سے

$$\therefore ۳ لا - لا^۲ - ۷ لا + لا^۳ = ۲ (لا - لا^۲) = ۲$$

$$\text{یعنی} \quad لا - لا^۲ - ۷ لا + لا^۳ = ۲ \quad (۳) \dots\dots\dots$$

$$\therefore (لا - لا^۲) (لا - لا^۲) = ۲$$

$$\text{اسلئے} \quad لا = لا^۲ \quad یا \quad لا = لا^۳$$

ہر ایک مساوات کو بالترتیب (۲) میں مندرج کرنے سے

$$لا = لا^۲ = لا^۳$$

$$لا = لا^۲ = لا^۳ = لا^۴$$

$$لا = لا^۲ = لا^۳ = لا^۴$$

$$لا = لا^۲ = لا^۳ = لا^۴ = لا^۵$$

نوٹ - یہ بات قابل توجہ ہے کہ مساوات (۳) متجانس ہے اس جگہ ہم نے ایک مساوات کو دوسری مساوات کی مدد سے متجانس بنالیا ہے - یہ ترکیب نہایت کارآمد ہے اور ہندسہ تحلیل میں کثرت سے استعمال ہوتی ہے -

مثال ۶ - حل کرو $(لا + لا^۲) ۲ + (لا - لا^۲) ۳ = ۲ (لا - لا^۲) \dots\dots\dots (۱)$

$۳ لا - لا^۲ = ۲ (لا - لا^۲) \dots\dots\dots (۲)$

مساوات (۱) کی ہر ایک رقم کو $(لا - لا^۲)$ یا $(لا + لا^۲)$ کے $\frac{1}{3}$ پر تقسیم کر دو تو حاصل ہوگا -

$$۳ = \frac{1}{3} (لا - لا^۲) ۲ + \frac{1}{3} (لا + لا^۲)$$

یہ مساوات بلحاظ $(\frac{لا + لا^۲}{لا - لا^۲})$ کے مساوات درجہ دوم ہے جس سے

$$\text{حاصل ہوگا} \quad ۲ یا ۱ \quad \text{جس سے} \quad \frac{لا + لا^۲}{لا - لا^۲} = ۱ یا ۸$$

∴ $۷ = لا$ یا $۱۹ = ۷$ یا $۰ = ۷$
 ان مساواتوں کو (۲) کے ساتھ ملا کر حل کرنے سے حاصل ہوگا
 $۷ = ۱۹$ ، $۷ = ۷$ یا $لا = ۱۳$ ، $۰ = ۷$

امثلہ نمبری ۱۶

مساوات ذیل کو حل کرو

- ۱- $۷ = لا - ۱۲$ ۲- $۳ = لا - ۷$
- ۳- $۲۰ = لا$ ۴- $۲۵ = لا - ۷$
- ۵- $۱ = لا - ۱۳$ ۶- $۱۹ = لا + لا + لا$
- ۷- $۲۵ = لا + لا + لا$ ۸- $۱۹ = لا + لا + لا$
- ۹- $۸۳ = لا + لا + لا$ ۱۰- $۷۵ = لا + لا + لا$
- ۱۱- $۷ = لا + لا + لا$ ۱۲- $۷ = لا + لا + لا$
- ۱۳- $لا + لا = لا + لا$ ۱۴- $۲ = لا - ۱۳$
- ۱۵- $لا + لا = لا + لا$ ۱۶- $۷۵ = لا + لا + لا$
- ۱۷- $۷۵ = لا - لا - لا$ ۱۸- $۷۵ = لا + لا + لا$
- ۱۹- $۷ = لا - لا$ ۲۰- $۷ = لا + لا + لا$
- ۲۱- $۷ = لا + لا$ ۲۲- $۷ = لا - لا$
- ۲۳- $۷ = لا - لا$ ۲۴- $۷ = لا - لا$
- ۲۵- $۷ = لا - لا$ ۲۶- $۷ = لا - لا$
- ۲۷- $۷ = لا - لا$ ۲۸- $۷ = لا - لا$
- ۲۹- $۷ = لا - لا$ ۳۰- $۷ = لا - لا$
- ۳۱- $۷ = لا - لا$ ۳۲- $۷ = لا - لا$
- ۳۳- $۷ = لا - لا$ ۳۴- $۷ = لا - لا$
- ۳۵- $۷ = لا - لا$ ۳۶- $۷ = لا - لا$
- ۳۷- $۷ = لا - لا$ ۳۸- $۷ = لا - لا$
- ۳۹- $۷ = لا - لا$ ۴۰- $۷ = لا - لا$
- ۴۱- $۷ = لا - لا$ ۴۲- $۷ = لا - لا$
- ۴۳- $۷ = لا - لا$ ۴۴- $۷ = لا - لا$
- ۴۵- $۷ = لا - لا$ ۴۶- $۷ = لا - لا$
- ۴۷- $۷ = لا - لا$ ۴۸- $۷ = لا - لا$
- ۴۹- $۷ = لا - لا$ ۵۰- $۷ = لا - لا$
- ۵۱- $۷ = لا - لا$ ۵۲- $۷ = لا - لا$
- ۵۳- $۷ = لا - لا$ ۵۴- $۷ = لا - لا$
- ۵۵- $۷ = لا - لا$ ۵۶- $۷ = لا - لا$
- ۵۷- $۷ = لا - لا$ ۵۸- $۷ = لا - لا$
- ۵۹- $۷ = لا - لا$ ۶۰- $۷ = لا - لا$
- ۶۱- $۷ = لا - لا$ ۶۲- $۷ = لا - لا$
- ۶۳- $۷ = لا - لا$ ۶۴- $۷ = لا - لا$
- ۶۵- $۷ = لا - لا$ ۶۶- $۷ = لا - لا$
- ۶۷- $۷ = لا - لا$ ۶۸- $۷ = لا - لا$
- ۶۹- $۷ = لا - لا$ ۷۰- $۷ = لا - لا$
- ۷۱- $۷ = لا - لا$ ۷۲- $۷ = لا - لا$
- ۷۳- $۷ = لا - لا$ ۷۴- $۷ = لا - لا$
- ۷۵- $۷ = لا - لا$ ۷۶- $۷ = لا - لا$
- ۷۷- $۷ = لا - لا$ ۷۸- $۷ = لا - لا$
- ۷۹- $۷ = لا - لا$ ۸۰- $۷ = لا - لا$
- ۸۱- $۷ = لا - لا$ ۸۲- $۷ = لا - لا$
- ۸۳- $۷ = لا - لا$ ۸۴- $۷ = لا - لا$
- ۸۵- $۷ = لا - لا$ ۸۶- $۷ = لا - لا$
- ۸۷- $۷ = لا - لا$ ۸۸- $۷ = لا - لا$
- ۸۹- $۷ = لا - لا$ ۹۰- $۷ = لا - لا$
- ۹۱- $۷ = لا - لا$ ۹۲- $۷ = لا - لا$
- ۹۳- $۷ = لا - لا$ ۹۴- $۷ = لا - لا$
- ۹۵- $۷ = لا - لا$ ۹۶- $۷ = لا - لا$
- ۹۷- $۷ = لا - لا$ ۹۸- $۷ = لا - لا$
- ۹۹- $۷ = لا - لا$ ۱۰۰- $۷ = لا - لا$

$$\begin{aligned}
 25 &= \frac{x}{y} + 1 & 1 &= \frac{x}{y} + 1 & -14 \\
 5 &= \frac{b}{a} + \frac{y}{x} & -18 & \frac{9}{x} &= \frac{b}{y} + \frac{y}{b} & -16 \\
 \frac{5}{4} &= \frac{5}{b} + \frac{2}{y} & & 1 &= \frac{x}{b+y} & \\
 20 &= \frac{1}{x} b + \frac{1}{x} b & -20 & 10 &= b + y & -19 \\
 45 &= \frac{x}{b} + \frac{x}{y} & & 14 &= \frac{1}{b} + \frac{1}{y} & \\
 r &= \sqrt{b-y} + \sqrt{b+y} & -22 & 5 &= \frac{1}{x} b + \frac{1}{y} & -21 \\
 4 &= \frac{1}{x} - \frac{y}{b} & & 5 &= \left(\frac{1}{x} b + \frac{1}{y} \right) 4 & \\
 \frac{1}{x} &= \frac{b}{y} + \frac{y}{b} & -23 & r &= \sqrt{1-y} + 1 & -23 \\
 10 &= b + y & & b &= \sqrt{1-y} - \sqrt{1+y} & \\
 \frac{1}{x} &= \frac{b+y}{b-y} + \frac{b-y}{b+y} & -25 & & & \\
 40 &= \frac{1}{x} + \frac{y}{b} & & & & \\
 4 &= 10 \cdot (8-b) & 10 &= 15 - \frac{1}{x} r + \frac{y}{b} & -24 \\
 \frac{1}{x} r - 10 &= \frac{1}{x} \cdot 10 &= r \cdot 0 + \frac{1}{x} \frac{y}{b} & -26 \\
 14 &= 11 - 10 \cdot (12 + \frac{1}{x} 25 - 10 \cdot 20 + 4 = 15 + \frac{y}{x} r & -28 \\
 18 &= 10 - \frac{y}{x} \cdot (12 + \frac{1}{x} r - 10 \cdot 12 = 12 - 10 \cdot 33 + \frac{y}{x} 9 & -29 \\
 \frac{1}{x} \frac{y}{4} r &= (\frac{1}{x} - \frac{y}{b})(\frac{1}{x} - \frac{y}{b}) & & \frac{1}{x} 14 &= (1-y)(\frac{1}{x} - \frac{y}{b}) & -30 \\
 65 &= 10 r + \frac{y}{x} & & \frac{1}{x} r &= \frac{1}{x} + 10 - \frac{y}{x} & -31 \\
 r &= 14 - 10 & & \frac{10 r}{1} &= \frac{\frac{1}{x} b - \frac{y}{b}}{(\frac{1}{x} - \frac{y}{b})} + \frac{\frac{1}{x} b + \frac{y}{b}}{(\frac{1}{x} + \frac{y}{b})} & -32
 \end{aligned}$$

$$۳۳- \quad ۰ = ۸ + (۲ + ۷۷ - ۲۸) \quad ۰ = ۲۴ + (۲ - ۷۷ - ۳۸)$$

$$۳۴- \quad ۳ - ۲ = ۲۱ + ۳ + ۸ - ۷۷ \quad ۰ = (۷۷ - ۲) \quad ۱$$

$$۳۵- \quad ۱۰۸ = ۲ + ۹ + ۷۷ - ۲۸ \quad ۰ = (۷۷ - ۲ - ۹) \quad ۱$$

$$۳۶- \quad ۱۶ + ۲ = ۱۲ + ۷۷ - ۳۸ \quad ۰ = (۷۷ - ۳۸ - ۱۲) \quad ۱$$

$$۳۷- \quad ۲ + ۷۷ = (۷۷ + ۲) \quad ۱$$

$$۳۸- \quad ۲ + ۷۷ = ۲ + ۷۷ \quad ۱$$

$$۳۹- \quad ۰ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۷۷} - \frac{۱}{۷۷} = \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۷۷}$$

$$۴۰- \quad ۱۰ + ۲ = ۳ + ۷۷ - ۳۸ \quad ۰ = ۱۰ + ۲ - ۳ - ۷۷ + ۳۸$$

$$۴۱- \quad ۱ = \frac{۲}{۷۷} - \frac{۱}{۷۷} + \frac{۱}{۷۷} = \frac{۲}{۷۷} - \frac{۱}{۷۷} + \frac{۱}{۷۷}$$

۱۵۱- جن مساواتوں میں تین یا تین سے زیادہ مقادیر مجہول شامل ہوں وہ صرف خاص صورتوں میں حل ہو سکتی ہیں ہم اس جگہ اُنکے حل کرنے کی چند مشہور ترکیبوں پر غور کریں گے۔

مثال ۱- حل کرد $۱۳ = ۷ + ۷ + ۷$ (۱)

(۲) $۶۵ = ۲ + ۷ + ۷$ (۲)

(۳) $۱۰ = ۷$ (۳)

(۲) اور (۳) سے $۸۵ = ۲ + ۷ + ۷$

۷ + ۷ کی جگہ و رکھنے سے یہ مساوات ہو جائے گی

۸۵ = ۲ + ۷ + ۷ (نیز (۱) سے ۷ + ۷ = ۱۳

جس سے حاصل ہوگا $۷ = ۷$ یا $۷ = ۷$

پس $\begin{cases} ۴ = م + لا \\ ۱۰ = م + لا \end{cases}$ اور $\begin{cases} ۴ = م + لا \\ ۱۰ = م + لا \end{cases}$

اسلئے $\begin{cases} ۱-۸ \pm ۳ = لا \\ ۱-۸ \mp ۳ = م \end{cases}$ یا $\begin{cases} ۲ یا ۵ = لا \\ ۵ یا ۲ = م \end{cases}$ $\begin{cases} ۷ = ی \\ ۷ = ی \end{cases}$

مثال ۲- حل کرو $(۴ + م)(۴ + لا) = ۳۰$

$$۱۵ = (۴ + م)(۴ + لا)$$

$$۱۸ = (۴ + م)(۴ + لا)$$

م + ی، م + لا، لا + م کی جگہ بالترتیب و، ہ، م لکھنے سے

ہ = م، م = و، و = ۱۵، و = ۱۸ (۱)

ان مساواتوں کو اکٹھا ضرب دینے سے

$$۲۴ \times ۱۵ = ۱۸ \times ۱۵ \times ۳۰ = ۹۰$$

$$۹۰ \pm = ۹۰$$

اس نتیجے کو معادلات (۱) میں سے کسی ایک کے ساتھ ملانے سے

و = ۳، ہ = ۴، م = ۵ یا و = ۳، ہ = ۴، م = ۵

$$\begin{cases} ۳ = م + لا \\ ۴ = م + لا \\ ۵ = م + لا \end{cases} \quad \begin{cases} ۳ = م + لا \\ ۴ = م + لا \\ ۵ = م + لا \end{cases}$$

میں سے لا = ۳، م = ۱، ی = ۲ یا لا = ۴، م = ۱، ی = ۲

مثال ۳- حل کرو $۴۹ = ۲ی + م + لا$ (۱)

(۲) $۱۹ = ۲ی + لا$

(۳)..... $39 = 2a + 2b + 2c$
 (۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

$$2a - 2b + 2c = 30$$

یعنی (۲)..... $30 = (a + b + c) - (a - b)$
 اسی طرح (۱) اور (۳) سے

$$(۵)..... 10 = (a + b + c) - (a - b)$$

اسلئے (۴) اور (۵) سے بذریعہ عمل تقسیم

$$3 = \frac{a-b}{b-a}$$

جس سے $3 = \frac{a-b}{b-a}$

مساوات (۳) میں مکی یہ قیمت مندرج کرنے سے

$$2a - 2b + 2c = 30$$

مساوات (۲) سے $2a - 2b + 2c = 19$

ان متجانس مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

$$2a = 3, 2b = 3 \text{ اور اسلئے } a = \pm 1.5$$

$$\text{یا } 2a = \pm \frac{11}{2}, 2b = \pm \frac{1}{2} \text{ اور اسلئے } a = \pm \frac{11}{4}, b = \pm \frac{1}{4}$$

مثال ۳۔ حل کرو $2a - 2b + 2c = 39$ ، $2a - 2b + 2c = 30$ ، $2a - 2b + 2c = 19$
 ان مساوات کو 'ا'، 'ب'، 'ج' سے بالترتیب ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔

$$(۱)..... 0 = 2a + 2b + 2c$$

ان مساواتوں کو 'ا'، 'ب'، 'ج' سے بالترتیب ضرب دینے اور جمع کرنے

سے حاصل ہوگا۔

$$(۲) \dots\dots\dots = ۰ \text{ ب}^۲\text{ا} + \text{ج}^۲\text{ما} + \text{ا}^۲\text{ی}$$

(۱) اور (۲) سے بذریعہ ضرب چلیپائی

$$\text{ا}^۲\text{ب} - \text{ب}^۲\text{ج} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}} = \frac{\text{ی}}{\text{ا}} = \text{ک (فرض کرو)}$$

دی ہوئی مساواتوں میں یہ قیمتیں مندرجہ کرنے سے

$$\text{ک}^۲ (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - ۳\text{ا}^۲\text{ب}^۲\text{ج}^۲) = ۱$$

$$\therefore \frac{\text{ا}^۲\text{ب} - \text{ب}^۲\text{ج}}{\text{ا}^۲\text{ب}^۲\text{ج}^۲} = \frac{\text{ی}}{\text{ا}^۲\text{ب}^۲\text{ج}^۲} = \frac{\text{ما}}{\text{ا}^۲\text{ب}^۲\text{ج}^۲} = \frac{۱}{\text{ا}^۲\text{ا}^۲\text{ب}^۲\text{ب}^۲\text{ج}^۲\text{ج}^۲}$$

۱۔ مثلہ نمبری ۷۱

مساوات ذیل کو حل کرو

$$۱ - \text{ا} - \text{ب} + \text{ا} + \text{ا} = ۸ \text{ ی} = ۰ \quad ۲ - \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} = ۳ \text{ ی} = ۰$$

$$۳ - \text{ا} - \text{ا} + \text{ا} = ۸ \text{ ی} = ۰ \quad ۴ - \text{ا} - \text{ا} - \text{ا} = ۳ \text{ ی} = ۰$$

$$\text{ما} + \text{ی} + \text{ا} + \text{ا} = ۷ \text{ ی} = ۰ \quad \text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = ۴ \text{ ی} = ۰$$

$$۳ - \text{ا} - \text{ا} - \text{ا} = ۲ \text{ ی} = ۰ \quad ۴ - \text{ا} + \text{ا} - \text{ا} = ۲ \text{ ی} = ۰$$

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ی} = ۲ \text{ ی} = ۰ \quad \text{لا} - \text{ما} - \text{ی} = ۳ \text{ ی} = ۰$$

$$\text{لا} = ۵ \quad \text{لا} = ۲ \text{ ی} = ۰$$

$$۵ - \text{ا} + \text{ما} - \text{ی} = ۲ \text{ ی} = ۰ \quad ۴ - \text{ا} + \text{لا} + \text{ا} + \text{ا} = ۱۸ \text{ ی} = ۰$$

$$\text{ما} + \text{ی} + \text{ا} + \text{ا} = ۱۲ \text{ ی} = ۰ \quad \text{ما} + \text{ی} + \text{ا} = ۱۸ \text{ ی} = ۰$$

$$\text{لا} + \text{ا} - \text{ی} = ۵ \quad \text{ی} + \text{ی} + \text{ا} + \text{ا} = ۳۰ \text{ ی} = ۰$$

- ۶- $لا^۲ + لا + لا^۳ = لا ی = ۵۰$ - ۸ $(ی - لا)(ی + لا) = ۲۲$
 $لا^۲ + لا^۳ + لا = لا = ۱۰$ $(ی + لا)(لا - لا) = ۳۳$
 $ی + لا + لا^۲ = لا ی = ۱۰$ $(ی - لا)(لا - لا) = ۶$
 ۹- $لا^۲ ی = ۱۲$ ، $لا^۲ لا ی = ۸$ ، $لا^۲ لا ی^۲ = ۱$ ، $لا^۲ لا ی^۳ = ۳$
 ۱۰- $لا^۲ لا ی = ۱۲$ ، $لا^۲ لا ی^۳ = ۵$ ، $لا^۲ لا ی^۲ = ۲$
 ۱۱- $لا + لا + لا = لا^۳ = ۲۳$ - ۱۲ $لا^۲ - لا + لا = لا = ۱۷$
 $لا ی + لا + ی = لا ی = ۴۱$ $لا^۳ + ی - لا = ی = ۵۲$
 $لا ی + لا + ی = لا ی = ۲۷$ $لا ی + ی + ی = لا ی = ۲۹$
 ۱۳- $لا ی + لا = لا ی = ۸$ ، $لا + لا + ی = ی = ۱۲$
 ۱۴- $لا^۲ + لا^۳ + ی = لا^۲ + لا + ی = ۳$ ، $لا^۲ + لا + ی = لا + لا + ی = ۵$
 ۱۵- $لا^۲ + لا + ی = لا ی + لا + لا = لا^۳$ ، $لا^۲ + لا + ی = لا - لا + ی = لا^۳$
 ۱۶- $لا^۲ + لا + ی = لا ی + لا - لا = لا^۳$ ، $لا^۲ + لا + ی = لا ی + لا - لا = لا^۳$
 $لا^۳ + لا - لا = ی = ۱۳$

باب یازدہم

ترتیب و اجتماع

۱۵۲- اگر متعدد اشیا میں سے چند یا سب اشیا لیکر انہیں مختلف طریقوں سے سلسلہ وار رکھا جائے تو ایسے ہر ایک طریقے کو ترتیب اشیا کہتے ہیں مثلاً کل ترتیبیں جو حروف ا، ب، ج، د میں سے دو دو حروف اکٹھے لینے سے بن سکتی ہیں ۱۲ ہیں یعنی

ا ب ، ا ج ، ا د ، ب ج ، ب د ، ج د

ب ا ، ج ا ، د ا ، ج ب ، د ب ، د ج

ان میں سے ہر ایک دو دو حروف کی ایک مختلف ترتیب ہے

اگر انہی چار حروف میں سے تین تین تین حروف کی مختلف ترتیبیں لگائیں تو یہ تعداد میں ۲۴ ہوں گی۔

ا ب ج	ا ب د	ا ج د	ب ج د
ا ج ب	ا د ب	ا د ج	ب د ج
ب ج ا	ب د ا	ج د ا	ج د ب
ب ا ج	ب ا د	ج ا د	ج ب د
ج ا ب	د ا ب	د ا ج	د ب ج
ج ب ا	د ب ا	د ج ا	د ج ب

ترتیبیں لگائی جائیں تو اپنی آئندہ سہولت کے لئے ہم ان مختلف ترتیبوں کی تعداد کو **پندرہ** سے تعبیر کریں گے اسی طرح سے اگر ن اشیا میں سے دار اشیا کے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ایسے اجتماعوں کی تعداد کو ہم **چھ** سے تعبیر کریں گے۔
اس طریق کتابت کے مطابق نتائج مندرجہ بالا اختصاراً یوں لکھے جاسکتے ہیں۔

ہ = ۱۲ ، ہ = ۲۲ ، ہ = ۲۲

ہ = ۴ ، ہ = ۶ ، ہ = ۴

نیز ہ = ۱ چونکہ چار حروف میں سے چار چار حروف کا ایک ہی اجتماع بن سکتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ۴ حروف میں سے تین تین حروف کے اجتماع تعداد میں چار ہیں یعنی

ا ب ج ، ا ب د ، ا ب ج د

اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ مثلاً ا ب ج چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جاسکتا ہے یعنی

ا ب ج ، ب ج ا ، ج ا ب

ا ج ب ، ب ا ج ، ج ب ا

اسی طرح سے ا ج د ، ا ب د ، ب ج د میں سے ہر ایک

اجتماع چھ مختلف طرح سے ترتیب دیا جاسکتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ چار اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبیں ان کی تعداد اجتماع کی ۶ گنی ہوتی ہیں

یعنی $۲۴ = ۴ \times ۶$ ج ۲۴

ترتیب و اجتماع کی بحث میں عام طور پر اس بات کا یاد رکھنا مفید ہو گا کہ مختلف اجتماع بنانے میں ہمارا تعلق صرف اُس تعدادِ اشیا سے ہوتا ہے جو کسی ایک انتخاب میں موجود ہو مگر ترتیب لگانے میں تدریجِ اشیا کا خاص لحاظ رکھنا پڑتا ہے مثلاً اب اور ب ۲ دو مختلف اجتماع نہیں ہیں مگر دو مختلف ترتیبیں ضرور ہیں۔

نوٹ ترتیب و اجتماع کے متعلق ایک اور مختصر طریق کتابت مندرجہ ذیل ہے اس کو بعض اوقات ہم اختصار کی خاطر استعمال کریں گے۔

ن اشیا کی (۱) ترتیبوں اور (۲) اشیا کے (۱) اجتماعوں سے آئندہ ہمارا یہ مطلب ہو گا کہ ن اشیا میں سے (۱) اشیا لیکر ان کی مختلف ترتیبیں اور اجتماع بنائے گئے ہیں۔

۱۵۳۔ ضروری - فرض کرو کہ ایک کام ۲ طرح سے ہو سکتا ہے اور ایک اور کام ۳ طرح سے ہو سکتا ہے تو ظاہر ہے کہ دونوں کام اکٹھے ۲×۳ مختلف طرح سے ہو سکتے ہیں بشرطیکہ ان میں کچھ لگاؤ یا تعلق ہو۔ اور اس کی وجہ یہ ہے کہ پہلے کام کرنے کا ہر ایک طریقہ دوسرے کام کے تینوں طریقوں میں سے کسی ایک کے ساتھ اکٹھا کیا جاسکتا ہے یا منسلک ہو سکتا ہے اور بالعموم اگر کسی ایک کام کرنے کے ۲ طریقے ہوں اور دوسرے کام کرنے کے ۳ طریقے ہوں تو دونوں کام ایک ساتھ کر کے کل طریقہ لایا ہونگے۔

مثلاً فرض کرو کہ کسی ڈاکرے میں سے ایک نارنگی نکالنے کے ۲ طریقے ہیں اور سیب نکالنے کے ۳ طریقے ہیں تو دونوں نارنگی اور سیب نکالنے

کل طریقے لانا ہونگے۔

مثال ۱۔ دس جہاز بمبئی اور کراچی کے درمیان آتے جاتے ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے ایک مسافر بمبئی سے کراچی جاسکتا ہے اور مختلف جہاز سے آسکتا ہے۔

پہلے سفر کے ۱۰ طریقے ہیں اور ان میں سے ہر ایک کے مقابل واپس آنے کے ۹ طریقے ہیں (کیونکہ مسافر جس جہاز سے جائے اُسی سے واپس نہیں آسکتا۔)

اسلئے آنے جانے کے مختلف طریقے $9 \times 10 = 90$

یہ اصول اُس صورت پر بھی حادی ہے جہاں دو سے زیادہ عمل ہوں اور ان میں سے ہر ایک متعدد طریقوں سے ہو سکتا ہو۔

مثال ۲۔ کسی شہر میں ۳ مسافر آئے وہاں چار مسافر خانے تھے اگر ان میں سے ہر ایک الگ الگ مسافر خانے میں رہے تو معلوم کرو کہ کتنے مختلف طریقوں سے وہ مختلف مسافر خانوں میں قیام کر سکتے ہیں پہلا مسافر چار مسافر خانوں میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے

اور جب اُس نے اپنا انتخاب کسی ایک طریقے سے کر لیا تو دوسرا مسافر باقی تین میں سے کسی ایک کو منتخب کر سکتا ہے معلوم ہوا کہ پہلے

دو مسافر 3×3 طریقوں سے اپنی جائے قیام کا انتخاب کر سکتے ہیں اور ان میں سے کسی ایک انتخاب کے ساتھ تیسرا مسافر دو طرح سے اپنا

مسافر خانہ منتخب کر سکتا ہے اسلئے مطلوبہ طریقے $3 \times 3 \times 2 = 18$

۱۵۴۔ تین حروف ا، ب، ج کی مختلف ترتیبوں کو تفصیل لکھنے کے بغیر ان کی تعداد اس طرح دریافت کر سکتے ہیں

ایسا خیال کرو کہ ہمیں تین خالی مقامات تین حروف ا، ب، ج سے پُر کرنے ہیں۔

پہلا مقام تین مختلف طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے یعنی ا سے یا ب سے یا ج سے۔

جب ایک مقام پُر ہو گیا تو دوسرے مقام کو پُر کرنے کے لئے ۲ حروف باقی ہو گئے کیونکہ اگر ۱ مقام اول کے لئے منتخب کیا گیا ہو تو ب اور ج ابھی باقی ہو گئے اور اگر ب مقام اول کیلئے مخصوص کیا گیا ہو تو ا اور ج باقی ہو گئے۔ اس سے معلوم ہوا کہ دوسرے مقام کو پُر کرنے کے ۲ طریقے ہیں اسلئے پہلے دو مقامات پُر کرنے کے طریقے ۲×۳ ہوئے۔

اب چونکہ صرف ایک حرف باقی ہے اسلئے تیسرے مقام کو پُر کرنے کا صرف ایک طریقہ ہے۔

پس معلوم ہوا کہ تینوں مقامات پُر کرنے کے کل طریقے $۱ \times ۲ \times ۳$ ہیں یعنی تین اشیا میں سے سب اشیا کی اکٹھی ترتیبیں $۱ \times ۲ \times ۳$ ہیں۔

اسی طرح سے اگر ۴ اشیا کی اکٹھی ترتیبیں لگانی منظور ہوں تو پہلا مقام ۴ طرح سے پُر ہو سکتا ہے اس کے بعد انتخاب کے لئے ۳ اشیا باقی رہیں گی اس لئے دوسرا مقام ۳ طرح سے پُر ہو سکتا ہے معلوم ہوا کہ پہلے دو مقام ۳×۴ طرح سے پُر ہو سکتے ہیں تیسرے مقام کو پُر کرنے کے ۲ طریقے ہونگے اسلئے پہلے تین مقام $۲ \times ۳ \times ۴$ طرح سے پُر ہو سکتے ہیں۔ اب چونکہ صرف ایک شے باقی ہے

۱۔ سئلے آخری مقام کے پُر کر نیکا صرف ایک طریقہ ہے۔ پس معلوم ہوا کہ چاروں مقامات پُر کرنے کے کل طریقے $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ یعنی ۲۴ ہیں

۱۵۵۔ ہتہ کی قیمت دریافت کرو

ایسا خیال کرو کہ ہمیں دو مقامات پُر کرنے ہیں۔ پہلا مقام ۵ اشیا میں سے کسی ایک سے پُر ہو سکتا ہے اسلئے ایسا کرنے کے کل ۵ طریقے ہیں

دوسرے مقام کو پُر کرنے کے لئے ہمارے پاس ۴ اشیا ہیں اسلئے دوسرا مقام ۴ طرح سے پُر ہو سکتا ہے پس معلوم ہوا کہ دونوں مقامات پُر کرنے کے کل طریقے ۴×۵ یعنی ۲۰ ہیں۔

اس قسم کا سوال گزشتہ سوال سے مختلف ہے کیونکہ یہاں ۵ اشیا میں سے صرف دو دو کی مختلف ترتیبیں مطلوب ہیں

۱۵۶۔ اگر ن اشیا میں سے ر، د اشیا کی ترتیبیں لگائی جائیں تو ان کی تعداد دریافت کرو یا دوسرے الفاظ میں ن اشیا کی ر، ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیا کو ن حروف د، ب، ج وغیرہ سے تعبیر کرو اور بموجب سابق فرض کرو کہ ر خالی مقامات ہیں اور ان میں سے ہر ایک مقام کو ایک حرف سے پُر کرنا ہے۔

پہلا مقام ن طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے کیونکہ ہم ن مختلف حروف میں سے کوئی سا ایک منتخب کر سکتے ہیں اور وہ پہلے مقام میں رکھا جاسکتا ہے۔ جب یہ کسی ایک طریقے سے پُر ہو گیا تو دوسرا مقام ن-۱ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور چونکہ پہلے مقام کے پُر کرنے کا

ہر ایک طریقہ دوسرے مقام کے پُر کرنے کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے اسلئے پہلے دو مقامات پُر کرنے کے کل طریقے یعنی $ن(ن-۱)$ جب پہلے دو مقام پُر ہو گئے تو تیسرا مقام $ن-۲$ طریقوں سے پُر ہو سکتا ہے اور دلیل سابق کے موافق پہلے تین مقامات پُر کرنے کے کل طریقے یعنی $ن(ن-۱)(ن-۲)$ اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک نئے مقام کے پُر ہونے پر مضرب میں ایک نیا جز ضروری داخل ہوتا ہے اور کسی خاص منزل پر اجزاء ضروری کی تعداد وہی ہے جو پُر کردہ مقامات کی۔ اس سے ثابت ہوا کہ مقامات پُر کرنے کے کل طریقے یعنی

$$ن(ن-۱)(ن-۲) \dots \dots \dots \text{اجزاء ضروری تک}$$

$$\text{اور } ر \text{ واں جز ضروری} = ن - (ر-۱) = ن - (ر-۱) + ۱$$

اسلئے $ن$ اشیا میں سے $ر$ اشیا کی ترتیبیں یعنی

$$ن(ن-۱)(ن-۲) \dots \dots \dots (ن-ر+۱)$$

نتیجہ صریح۔ اگر $ن$ اشیا میں سے سب اشیا کی اکٹھی ترتیبیں لگائی جائیں تو ان کی تعداد $ن(ن-۱)(ن-۲) \dots \dots \dots$ اجزاء ضروری تک

$$= ن(ن-۱)(ن-۲) \dots \dots \dots ۱ \times ۲ \times ۳$$

اس حاصل مضرب کو (یعنی ایک سے لیکر $ن$ تک تمام اعداد صحیح کے حاصل ضرب کو) $ن!$ یا $ن$ سے تعبیر کرتے ہیں اسے ہم حاصل ضروری $ن$ یا اختصاراً "ضروری $ن$ " کہیں گے پس معلوم ہوا کہ

$$ن! = ن(ن-۱)(ن-۲) \dots \dots \dots ۱ \times ۲ \times ۳ \dots \dots \dots$$

نوٹ۔ عددی مثالیں حل کرنے میں اس بات کا خیال رکھنا مفید ہوگا کہ علامت

پتر میں حرف آخر (یعنی ر) سے حاصل ضرب کے اجزاء ضربی کی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

۱۵۷۔ ن اشیا میں سے ر اشیا کی ترتیبوں کی تعداد طریق ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر اشیا کی کل ترتیبیں پتر سے تعبیر ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ن اشیا میں سے ر-۱، ۱-ر اشیا کی کل ترتیبیں لگاتے ہیں ان کی تعداد پتر ہوگی

اب ان میں سے ہر ایک ترتیب کے ساتھ باقی ن-ر+۱ اشیا میں سے ہر ایک شے کو باری باری رکھو ہر دفعہ ایسا کرنے سے ہمیں ن اشیا میں سے ر اشیا کی ایک ترتیب حاصل ہوگی اور اس لئے ن اشیا میں سے ر اشیا کی کل ترتیبیں پتر × (ن-ر+۱) ہوگی

$$\text{یعنی پتر} = \text{پتر} \times (ن-ر+۱)$$

$$\text{کیجگہ ر-۱ لکھنے سے پتر} = \text{پتر} \times (ن-ر+۲)$$

$$\text{اسی طرح سے پتر} = \text{پتر} \times (ن-ر+۳)$$

$$\text{پتر} = \text{پتر} \times (ن-۲)$$

$$\text{پتر} = \text{پتر} \times (ن-۱)$$

$$\text{پتر} = \text{پتر}$$

عمودی سطروں کو اکٹھا ضرب دو اور متماثل ارقام کو طرفین سے خارج کرو تو حاصل ہوگا۔

$$\text{ہتر} = \text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) \dots (\text{ن}-1) (1+\text{ن})$$

$$\text{نتیجہ صریح} - \text{ہتر} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}$$

$$\text{کیونکہ ہتر} = \text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) \dots (\text{ن}-1) (1+\text{ن})$$

$$= \frac{\text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) \dots (\text{ن}-1) (1+\text{ن})}{1 \times 2 \times 3 \dots (\text{ن}-1)}$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{ن}-1}$$

مثال ۱- ہتر کی قیمت دریافت کرو
قیمت مطلوبہ = چھ اشیا میں سے چار چار اشیا کی ترتیبوں کی تعداد
 $360 = 3 \times 2 \times 1 \times 4 =$

مثال ۲- نو ہند سے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ ہیں ان میں سے چھ
چھ ہند سے لینے سے کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں؟
یہاں نو مختلف اشیا ہیں ان میں سے چھ چھ کی مختلف ترتیبیں معلوم
کرنی ہیں اسلئے اعداد مطلوبہ کی تعداد = ہتر
 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 6 =$

$$720 =$$

مثال ۳- کل ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹے کتنی مختلف طرح سے
بج سکتے ہیں اور ۷ گھنٹے سب کے سب اکٹھے کتنی مختلف طرح سے
بج سکتے ہیں؟
چونکہ مختلف گھنٹوں کے بچنے سے مختلف آوازیں پیدا ہوتی ہیں

اسلئے اگر انہیں مختلف ترتیبوں سے بجایا جائے تو ہر دفعہ ایک مختلف اور نئی آواز پیدا ہوگی (مثلاً اگر دو گھنٹوں ۱ اور ۲ کو ترتیب ۱ ۲ بجایا جائے تو اس طرح سے جو مرکب آواز پیدا ہوگی وہ ان کو ترتیب ۲ ۱ میں بجانے سے مختلف ہوگی)

پس ۷ گھنٹوں میں سے چار چار گھنٹوں کے بجنے کے مختلف اطوار

$$= ۲۱۶ = ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ = ۸۴۰$$

اور ۷ گھنٹوں کے اکٹھے بجنے کے کل اطوار = ۲۱۶

$$= ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ =$$

$$۵۰۴۰ =$$

مثال ۴۔ چھ ہندسوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ میں سے کل کتنے اعداد بن سکتے ہیں جو ۳۰۰۰ اور ۴۰۰۰ کے درمیان واقع ہوں اور ۵ پر تقسیم ہوسکیں۔

چونکہ ہر ایک عدد ۳۰۰۰ اور ۴۰۰۰ کے درمیان واقع ہوتا ہے اسلئے ظاہر ہے کہ وہ ۳ سے شروع ہوتا ہے اور اس میں ۴ ہندسے شامل ہیں نیز چونکہ وہ ۵ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اسلئے اکائی کی جگہ ۵ ہونا چاہیئے (کیونکہ دئے ہوئے ہندسوں میں صفر نہیں ہے۔)

پس معلوم ہوا کہ اعداد مجوزہ ایسے ہیں کہ ان میں اول اور آخر کے ہندسے معین ہیں صرف دو درمیانی مقامات کو ہندسوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ سے پُر کرنا ہے اور ایسا کرنے کے کل طریقے = ۲۱۶ =

مثال ۵۔ لفظ "مقاعدہ" کے حروف اور کتنے الفاظ بن سکتے ہیں؟ یہاں کل ۷ حروف ہیں یعنی م، ت، ص، ل، ع، د، ہ

اب چونکہ حروف کی مختلف ترتیبوں سے مختلف الفاظ پیدا ہوتے ہیں اسلئے مندرجہ بالا حروف سے جو الفاظ بن سکتے ہیں اُن کی تعداد = پتہ = $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

$$5040 =$$

$$5040 = 1 - 5040 = 5039$$

اب فرض کرو کہ ایسے اعداد کی تعداد مطلوب ہے جن کے شروع میں ہمیشہ م ہوتا ہے اور آخر میں ۷۔

اس صورت میں م اور لا کو اپنی اپنی جگہ قائم کرو اور باقی ۵ درمیانی حروف کو آپس میں ترتیب دو پس الفاظ کی تعداد مطلوبہ

$$= \text{پتہ} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

مثال ۶۔ کتنے مختلف طریقوں سے ۷ حروف ۱، ب، ج، د، ۴، ف، گ آپس میں اس طرح پر ترتیب دئے جاسکتے ہیں کہ (۱) ب اور ج ہمیشہ لکھے رہیں (۲) ب اور ج کبھی لکھے نہ ہوں۔

(۱) چونکہ ب اور ج ہمیشہ لکھے رہیں گے اسلئے ہم انہیں ایک خطوط وحدانی کے اندر داخل کرتے ہیں جیسے (ب ج) اور چھ شیاں ۱، (ب ج)، د، ۴، ف، گ کی مختلف ترتیبیں دریافت

کرتے ہیں ایسی ترتیبوں کی تعداد = پتہ

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

ان میں سے ہر ایک ترتیب میں حروف ب اور ج ترتیب ب ج میں پائے جاتے ہیں

اسی طرح سے ۷۲۰ ترتیبیں ایسی ہیں جن میں حروف مذکورہ کی ترتیب ج ب ہے پس معلوم ہوا کہ کل ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج ہمیشہ متصل ہیں ۷۲۰×۲ یا ۱۴۴۰ ہے
(۲) فرض کرو کہ اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں حروف ب اور ج اکٹھے نہیں ہیں لہٰذا اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں وہ اکٹھے ہیں ما،
تب صریحاً لا + ما = پتہ

$$\begin{aligned} \text{اور بموجب حصہ (۱) } ۲ &= \text{پتہ} \\ \text{اسلئے لا} &= \text{پتہ} - ۲ \\ &= ۷۲۰ - ۲ \\ &= (۷۲۰ - ۲) \end{aligned}$$

$$۷۲۰ \times ۵ =$$

$$۳۶۰۰ =$$

اسلئے اُن ترتیبوں کی تعداد جن میں ب اور ج اکٹھے نہیں ہوتے ۳۶۰۰ ہے
۱۵۸۔ ن اشیا میں سے ر، اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کر دیا ن اشیا کے ر، اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ج سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب ان میں سے ہر ایک اجتماع ایسی مختلف اشیا کا مجموعہ ہے جو آپس میں لے طریقوں سے ترتیب دی جاسکتی ہیں۔
اسلئے چ \times لے = ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کی ترتیبوں کی تعداد

$$\text{یعنی چ} \times \text{لے} = \text{پتہ}$$

$$\text{اسلئے ج} = \frac{\text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) \dots \text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) (3-\text{ن}) \dots (1+\text{ن})}{\text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) \dots (1+\text{ن})}$$

نتیجہ صریح - منابض ج مختلف صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے کیونکہ اگر ہم شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو ن سے ضرب دیں تو حاصل ہوگا

$$\text{ن} (1-\text{ن}) (2-\text{ن}) \dots (1+\text{ن})$$

لے لے لے

شمار کنندہ میں اب ایک سے لیکر ن تک کے کل طبعی اعداد شامل ہیں اسلئے

$$\text{ج} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} (1-\text{ن}) \dots (1+\text{ن})} \quad (2)$$

بہتر ہو گا کہ طالب علم ج کی قیمت کی دونوں صورتیں (۱) اور (۲) یاد رکھے اور نتیجہ (۱) کو اُس وقت استعمال کرے جب عددی جواب مطلوب ہو اور (۲) کو اُس وقت استعمال کرے جب سوال کو صرف صورت جبریہ میں ختم کرنا کافی ہو۔

نوٹ - اگر نتیجہ (۲) میں فرض کیا جائے کہ $\text{ن} = 1$ تو

$$\text{ج} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}} = 1$$

لیکن $\text{ج} = 1$ اسلئے اگر نتیجہ اُس صورت میں صحیح ہو جب کہ $\text{ن} = 1$ تو علامت ن کو ایک کے مساوی خیال کرنا چاہیئے۔

مثال ۱- اگر $2 + 2$ اشیا میں سے تین تین اشیا کے اجتماعوں

کی تعداد $\frac{2}{3}N$ اشیا میں سے دودواشیا کے اجتماعوں کی تعداد کی اگنی
ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو

$$\frac{N(1+N)(2+N)}{3 \times 2 \times 1} = \text{ج} \quad \text{چونکہ } \frac{2}{3}N$$

$$\frac{(1 - \frac{2}{3}) \frac{2}{3} N}{2 \times 1} = \text{ج} \quad \text{اور } \frac{2}{3}N$$

اسلئے بموجب شرائط سوال

$$\frac{(3-N)2}{9 \times 2 \times 1} \times 11 = \frac{N(1+N)(2+N)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$(3-N)22 = (1+N)(2+N)3 \quad \text{یا}$$

$$0 = 42 + N35 - 2N3 \quad \text{یا}$$

$$0 = (8-N3)(9-N) \quad \text{یا}$$

$$9 = N \quad \text{اسلئے}$$

چونکہ تعداد اشیا کمسور نہیں ہو سکتی اسلئے N کی دوسری قیمت

غیر واجب ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ ج : ج

$$\left\{ \frac{2}{3}N \dots 5 \times 3 \times 1 \right\} : \left\{ (1-N) \dots 5 \times 3 \times 1 \right\} =$$

$$\frac{\frac{2}{3}N}{N} = \text{ج} \quad \text{اور} \quad \frac{\frac{2}{3}N}{N} = \text{ج} \quad \text{چونکہ } \frac{2}{3}N$$

$$\frac{\frac{2}{3}N}{N} \times \frac{\frac{2}{3}N}{N} = \text{اسلئے نسبت مطلوبہ}$$

$$^2 \left\{ \frac{[n]}{[n^2]} \right\} \times \frac{[n^2]}{[n^2]} =$$

$$\text{اب } [n^2] = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2$$

$$\{n^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} \times \{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} =$$

$$\{n^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\}^2 \times \{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} =$$

$$(1) \dots \dots \dots n^2 \times \{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} = \frac{[n^2]}{[n^2]} \text{ اسلئے}$$

$$\{n^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} \times \{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} = [n^2] \text{ نیز}$$

$$\{n^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\}^2 \times \{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} =$$

$$n^2 \times \{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\} = \frac{[n^2]}{[n]} \text{ اسلئے}$$

$$(2) \dots \dots \dots n^2 \times \frac{1}{\{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\}} = \left\{ \frac{[n]}{[n^2]} \right\} \text{ اسلئے اور}$$

$$\frac{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2}{\{(1-n^2) \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n^2\}} = \text{اسلئے (۱) اور (۲) سے نسبت مطلوبہ}$$

۱۵۹- ن اشیا میں سے ر، راشیا کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہوگی جو انہی اشیا میں سے ن-ر، ر-ن-ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد ہوگی۔ ن اشیا میں سے ر، راشیا کے کل ممکن اجتماع بنانے میں جب ہم راشیا کا کوئی ایک مجموعہ منتخب کرتے ہیں تو اس کے مقابل ن-ر اشیا کا ایک مجموعہ باقی رہتا ہے یعنی ن اشیا میں سے ر، راشیا کے اجتماعوں کی تعداد وہی ہے جو ن اشیا میں

سے ن۔ ر۔ مان۔ در اثنا کے اجتماعوں کی تعداد ہے۔

$$\text{ج} = \text{ج} - \text{ج} - \text{ر}$$

اس مسئلہ کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

$$\text{ج} - \text{ج} - \text{ر} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ر} - \text{ن} - (\text{ن} - \text{ر})} \quad [\text{دفعہ ۱۵۸}]$$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ر} - \text{ر}} = \text{ج} - \text{ج} - \text{ر}$$

ایسے اجتماعوں کو متمم اجتماع کہتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر $\text{ج} = \text{ج}$ تو $\text{لا} = \text{ما} + \text{ما} = \text{ن}$ کیونکہ ظاہر ہے کہ لا اور ن۔ لا میں سے ما کی کوئی سی ایک قیمت ہو سکتی ہے

$$\text{نوٹ۔} \quad \text{ج} = \text{ج} - \text{ج} - \text{ج} = ۱$$

نتیجہ $\text{ج} = \text{ج} - \text{ج} - \text{ج}$ جو ہم نے ابھی ثابت کیا ہے حسابی عمل کے مختصر کر دینے میں نہایت کار آمد ہے۔

مثال ۱۔ $\text{ج} = \text{ج} = \text{ج} = \text{ج}$ کی قیمتیں دریافت کرو

$$\frac{۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \text{ج} = \text{ج} = \text{ج} = \text{ج}$$

$$۳۹۵ = ۹ \times ۵ \times ۱۱ =$$

$$\frac{۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \text{ج} = \text{ج} = \text{ج} = \text{ج}$$

$$۵۰۰۵ = ۵ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۷ =$$

$$\frac{۲۳ \times ۲۴ \times ۲۵}{۳ \times ۲ \times ۱} = \text{ج}_{۲۵} = \text{ج}_{۲۲-۲۵} = \text{ج}_{۲۲}$$

مثال ۲- اگر $\text{ج}_{۱۳} = \text{ج}_{۱۱}$ تو $\text{ج}_{۲۸}$ اور $\text{ج}_{۳۲}$ کی قیمتیں دریا کرو

چونکہ $\text{ج}_{۱۳} = \text{ج}_{۱۱}$ $\therefore \text{ن} = ۱۲ + ۱۶ = ۲۸$

اسلئے $\text{ج}_{۲۸} = \text{ج}_{۲۸} = \text{ج}_{۲۸} = \frac{۲۹ \times ۳۰}{۲ \times ۱} = ۴۳۵$

اور $\text{ج}_{۳۲} = \text{ج}_{۳۲} = \text{ج}_{۳۲} = \frac{۳۱ \times ۳۲}{۲ \times ۱} = ۴۹۶$

مثال ۳- اگر $\text{ج}_{۱۲} = \text{ج}_{۱۴}$ اور اگر ان میں سے ہر ایک کی نسبت $\text{ج}_{۱۳}$ سے ۵:۴ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

چونکہ $\text{ج}_{۱۲} = \text{ج}_{۱۴}$

اسلئے $\text{ن} + ۱ = \text{ن} - ۲ \dots \dots \dots (۱)$

اب چونکہ $\text{ج}_{۱۲} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۲} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۱ + ۱} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۱ + \text{ن} - \text{ن} + ۱}$

اور $\text{ج}_{۱۴} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۱ + ۱} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۱ + \text{ن} - \text{ن} + ۱} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۱ + \text{ن} - \text{ن} + ۱}$

اسلئے بموجب شرائط سوال

$$\frac{۱ + \text{ن} - ۲}{\text{ن}} = \text{ج}_{۱۲} \div \text{ج}_{۱۴} = \frac{۵}{۴}$$

$\frac{۱ + \text{ن} - ۲}{\text{ن}} =$ بموجب (۱)

جس سے $\text{ن} = ۸$ اور اسلئے $\text{ن} = ۱ + ۲ = ۱۴$

۱۶۰۔ جب ن اشیا میں سے ر، د اشیا کے ایسے اجتماع مطلوب ہوں جن میں سے ہر ایک اجتماع میں ایک خاص شے شامل ہو تو ہمیں اُس شے کو علیحدہ نکال کر باقی ماندہ ن-۱ اشیا میں سے ر-۱، د-۱ اشیا کے مختلف اجتماع بنانے چاہئیں اور پھر ہر ایک ایسے اجتماع میں اُس خاص شے کو شامل کر دینا چاہیے۔

پس معلوم ہوا کہ ن اشیا میں سے ر، د اشیا کے اُن اجتماعوں کی تعداد جن میں سے ہر ایک میں ایک خاص شے ہمیشہ شامل ہوتی ہے،

مثال ۱۔ ایک تماش کی بازی لگانے کے لئے ۱۰ مردوں میں سے چھ چھ کی مختلف جماعتیں مطلوب ہیں معلوم کرو کہ یہ عمل کتنی طرح ہو سکتا ہے۔

تعداد مطلوبہ = ج = ج = $\frac{۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$ = ۲۱۰
اس تعداد میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل ہوگا اُسے علیحدہ کرو اور باقی ۹ مردوں میں سے پانچ پانچ کی مختلف جماعتیں بناؤ اور پھر آخر میں اس کو ہر ایک جماعت میں شامل کرو۔
ایسی جماعتوں کی تعداد = ج = ج =

$$۱۲۶ = \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹}{۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

ان میں کتنے انتخاب ایسے ہیں جن میں ایک خاص آدمی شامل نہیں ہوگا اُسے علیحدہ کرو اور باقی ۹ میں سے چھ چھ کی جماعتیں بناؤ تعداد

$$۸۴ = \frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۳ \times ۲ \times ۱} = ج = ج$$

مثال ۲۔ کل ۱۲ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں کتنی طرح سے منتخب ہو سکتی ہیں جبکہ ہر ایک صورت میں (۱) ایک خاص کتاب ہمیشہ شامل کی جائے۔ (۲) ایک خاص کتاب ہمیشہ خارج کی جائے۔ (۱) چونکہ ہر ایک انتخاب میں کتاب مختص شامل ہوگی اسلئے ہمیں گیارہ کتابوں میں سے صرف چار چار کتابیں منتخب کرنی ہیں۔

$$\text{اسلئے تمام طریقوں کی تعداد} = {}^{\text{ج}}_8 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

(۲) چونکہ کتاب مختص ہمیشہ خارج کی جائے گی اسلئے ہمیں ۱۱ کتابوں میں سے پانچ پانچ کتابیں منتخب کرنی ہیں اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$${}^{\text{ج}}_7 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2 \times 1} = 252$$

۱۶۱۔ امثلہ ذیل میں یہ بات قابل توجہ ہے کہ ترتیب لگانے کے قاعدہ کو استعمال نہیں کرنا چاہیئے جب تک کہ مناسب اجتماع بموجب شرائط سوال مرتب نہ ہو جائیں۔

مثال ۱۔ ۸ ہندوستانیوں اور ۵ انگریزوں میں سے ۷ کی ایک کمیٹی بنانی ہے معلوم کرو کہ یہ کتنے مختلف طریقوں سے ہو سکتا ہے جبکہ کمیٹی میں (۱) صرف ۲ انگریز ہوں (۲) کم از کم دو انگریز ہوں۔

(۱) کمیٹی میں دو انگریز اور اسلئے ۵ ہندوستانی ہونگے اب ۸ ہندوستانیوں میں سے ۵ ہندوستانی منتخب کرنے کے طریقے

$${}^{\text{ج}}_5 = {}^{\text{ج}}_8$$

اور ۵ انگریزوں میں سے ۲ انگریز منتخب کرنے کے طریقے ${}^{\text{ج}}_2 = {}^{\text{ج}}_5$

چونکہ کمیٹی بنانے میں ہر ایک ہندوستانی گروہ ہر ایک انگریزی گروہ سے منسلک ہو سکتا ہے اسلئے کمیٹی بنانے کے کل طریقے = ج × ج

$$\frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱} \times \frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} =$$

$$۵۶۰ = ۱۰ \times ۵۶ =$$

(۲) کمیٹی میں ۲، ۳، ۴، ۵ انگریز جو سکتے ہیں اس لئے ہیں چار مختلف صورتوں پر غور کرنا چاہیئے :-

صورت اول - کمیٹی میں ۲ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں -

صورت دوم - " ۳ انگریز اور ۴ ہندوستانی ہیں

صورت سوم - " ۴ انگریز اور ۳ ہندوستانی ہیں

صورت چہارم - " ۵ انگریز اور ۲ ہندوستانی ہیں

اب بموجب حصہ (۱) پہلی صورت میں کمیٹی بنانیکے مختلف طریقے

$$= \text{ج} \times \text{ج} \text{ ' دوسری صورت میں } = \text{ج} \times \text{ج} \text{ ' تیسری صورت میں}$$

$$= \text{ج} \times \text{ج} \text{ اور چوتھی صورت میں } = \text{ج} \times \text{ج}$$

$$\text{اسلئے تعداد مطلوبہ} = (\text{ج} \times \text{ج}) + (\text{ج} \times \text{ج})$$

$$+ (\text{ج} \times \text{ج}) + (\text{ج} \times \text{ج})$$

$$= \text{ج} \times ۱ + (\text{ج} \times \text{ج}) + (\text{ج} \times \text{ج}) + (\text{ج} \times \text{ج}) =$$

$$\left(\frac{۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱} \right) + \left(\frac{۶ \times ۷ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{۴ \times ۵}{۲ \times ۱} \right) =$$

$$\left(\frac{۷ \times ۸}{۲ \times ۱} \right) + \left(\frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۵}{۳ \times ۲ \times ۱} \right) +$$

$$۲۸ + ۲۸۰ + ۷۰۰ + ۵۶۰ =$$

$$۱۵۶۸ =$$

مثال ۲- ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں ان میں سے ۳ ایک طرف چپو چلا سکتے ہیں اور ۲ دوسری طرف، معلوم کرو کہ کشتی میں ان کی نشستیں کتنی طرح سے ترتیب دی جاسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ملاح ۱، ب، ج، د، ع، ف، گ، ۸ ہیں نیز فرض کرو کہ ۱، ب، ج ہمیشہ ایک طرف اور د، ع ہمیشہ دوسری طرف رہتے ہیں جیسا کہ ترتیب ذیل سے ظاہر ہے۔

۱	۱
ب	۲
ج	۳

اب ضروری ہے کہ دونوں طرف چار چار ملاح ہوں باقی تین میں سے ایک کو ۱، ب، ج کی طرف بٹھانا چاہیئے اور دوسرے دو کو د اور ع کی طرف۔

ظاہر ہے کہ یہ عمل تین طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ہم کسی ایک کو ۱، ب، ج کی طرف بٹھا سکتے ہیں۔

ان تینوں طریقوں میں سے فی الحال ایک پر غور کرو یعنی جب ف کو ۱، ب، ج کی طرف بٹھایا جائے دیکھو ترتیب ذیل

۱	۱
ب	۲
ج	۳
ف	۴

اب ا ، ب ، ج ، ف آپس میں [۴] طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں اور صریحاً ان میں سے ہر ایک ترتیب کے مقابل د ا ، ع ، گ ، لا کو آپس میں ترتیب دینے کے [۴] طریقے ہیں اس لئے اس صورت میں ملاحوں کو ترتیب دینے کے کل طریقوں کی تعداد = ۴×۴

اسی طرح سے دوسری دو صورتوں میں سے ہر ایک کے مقابل ملاحوں کو آپس میں ترتیب دینے کے ۴×۴ طریقے ہیں۔ اس لئے ملاحوں کو آپس میں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے

$$= ۴ \times ۴ \times ۳$$

$$= ۲۴ \times ۲۴ \times ۳$$

$$= ۱۷۲۸$$

مثال ۳۔ ۱۰ حروف صحیح اور ۴ حروف علت میں سے کتنے ایسے الفاظ بن سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حروف صحیح اور ۲ حروف علت شامل ہوں۔

۱۰ حروف صحیح میں سے تین تین حروف کے مجموعوں کی تعداد = ج
۴ حروف علت میں سے دو دو حروف کے مجموعوں کی تعداد = ج
اب پہلی قسم کے ہر ایک مجموعہ کو دوسری قسم کے ہر ایک مجموعہ کیساتھ اکٹھا کرنے سے ہمیں ج \times ج مجموعے حاصل ہوتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۳ حروف صحیح اور ۲ حروف علت شامل ہیں
اب ان میں سے ہر ایک مجموعہ میں ۵ مختلف حروف ہیں جو آپس میں [۵] طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں۔

اسلئے الفاظ کی تعداد مطلوبہ = ج × ج × ج × ۵

$$= ۵ \times \frac{۳ \times ۳}{۲ \times ۱} \times \frac{۸ \times ۹ \times ۶}{۳ \times ۲ \times ۱} =$$

$$۵ \times ۶ \times ۱۲۰ =$$

$$۱۲۰ \times ۶۰ =$$

$$۸۶۴۰ =$$

مثال ۳- اگر ان اشیاء میں سے ر، راشیا کی ترتیبیں لگائی جائیں تو معلوم کرو کہ کتنی ترتیبوں میں تین اشیاء معینہ شامل ہونگی۔
سب سے پہلے ہم ان اشیاء میں سے ر، راشیا کے ایسے اجتماعوں کی تعداد دریافت کریں گے جن میں سے ہر ایک اجتماع میں تینوں اشیاء معینہ شامل ہوں۔

ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک ایسا اجتماع بنائیں جس میں تینوں اشیاء مذکورہ شامل ہوں تو اس میں اور ۳- اشیاء بھی موجود ہونگی جو باقی ماندہ ۳- اشیاء میں سے منتخب کی گئی ہیں پس معلوم ہو کہ راشیا کے ایسے اجتماع جن میں تینوں اشیاء موجود ہوں انہیں ہونگے جتنے کہ ۳- اشیاء میں سے ۳-، ۳-، ۳- اشیاء کے اجتماع ہیں۔

$$\text{یعنی اجتماعوں کی تعداد مطلوبہ} = \frac{۳- \text{ان}}{۳- \text{ان} - ۳- \text{ر}} =$$

لیکن ان میں سے ہر ایک راشیا کا مجموعہ آپس میں ۱- طرح سے ترتیب دیا جاسکتا ہے پس کل ترتیبوں کی تعداد جن میں تینوں اشیاء معینہ شامل ہیں = $\frac{۳- \text{ان}}{۳- \text{ان} - ۳- \text{ر}} \times ۱-$

$$= \frac{3 - \text{ن}}{\text{ن} - ۱} \times (۱ - ۲) (۲ - ۲)$$

۱۶۲- اگر ن اشیا کے مختلف پارسل بنانے مطلوب ہوں تو اس سوال کا حل منابطہ متعلقہ ج سے حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا کے ایسے دو پارسل بنانے مطلوب ہیں جن میں سے ایک میں راشیا اور دوسرے میں باقی ن۔ راشیا شامل ہوتی ہیں پہلے پارسل کی راشیا منتخب کرنے کے کل طریقے ج ہیں اور ظاہر ہے کہ جب ہم راشیا کا ایک اجتماع بناتے ہیں تو ن۔ راشیا کا ایک اجتماع باقی رہتا ہے اور وہ دوسرے پارسل کی تعداد اشیا ہے پس معلوم ہو کہ دونوں پارسل بنانے کے کل طریقوں کی تعداد وہی ہے جو پہلے پارسل کی راشیا منتخب کرنے کی تعداد ہے۔

$$\text{اس لئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \text{ج} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - ۱}$$

اگر ل + م اشیا کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنا مطلوب ہو یا ان کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں جداگانہ ل اور م اشیا شامل ہوں تو ایسا کرنے کے کل طریقے $= \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل}}$ (۱)

اگر ل + م + ن اشیا میں سے تین ایسے اجتماع یا پارسل بنانے مطلوب ہوں جن میں جداگانہ ل، م، ن اشیا شامل ہوں تو سب سے اول ہم انہیں ایسے دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں بالترتیب ل اور م + ن اشیا شامل ہوں (۱) سے ظاہر ہے کہ ایسا کرنے کے کل طریقوں

کی تعداد $\frac{ل+م+ن}{ل+م}$ ہے، اسی طرح سے $م+ن$ اشیا کے دو پارسل جن میں جدا گانہ $م$ اور $ن$ اشیا شامل ہوں $\frac{ل+م+ن}{ل+ن}$ طرح سے بن سکتے ہیں اسلئے $ل+م+ن$ اشیا میں سے بالترتیب $ل، م، ن$ اشیا کے تین پارسل بنانے کے کل طریقے

$$\frac{ل+م+ن}{ل+م} \times \frac{ل+م+ن}{ل+ن} = \frac{ل+م+ن}{ل+م+ن}$$

$ل+م$ اشیا کے دو پارسل بنانے میں وہ صورت جبکہ $ل = م$ قابل غور ہے یہاں منابطہ $\frac{ل+م}{ل}$ سے صحیح جواب حاصل نہیں ہوتا۔

مثلاً ایک سادہ صورت پر غور کرو جہاں دو دو اشیا کے پارسل بنانے کے لئے $م$ اشیا $ا، ب، ج، د$ اس طرح تقسیم کی گئی ہیں

یعنی

ا ب	اور	ج د
ا ج	"	ب د
ا د	"	ب ج
ب ج	"	ا د
ب د	"	ا ج
ج د	"	ا ب

ہمیں صابطہ ج سے معلوم ہے کہ اس قسم کی تقسیم کے $\frac{۲۱}{۲۲}$ یعنی

۶ طریقے ہیں لیکن ہر ایک طریقہ دو دفعہ تکرار پاتا ہے پس معلوم ہوا کہ مطلوبہ مختلف طریقوں کی تعداد مندرجہ بالا کا نصف ہے

اسی طرح سے جب ۲۱ اشیا کے ایسے دو پارسل بنانے ہوں جن میں سے ہر ایک پارسل میں ۱ اشیا شامل ہوں تو ایسا کرنے کے

$$\text{کل طریقے} = \frac{۲۱}{۱} = ۲۱$$

اب اگر یہی پارسل دو شخصوں کو دئے جائیں تو ایسا کرنے کے کل طریقے

$$\frac{۲۱}{۱} \times ۲ = ۴۲ \text{ یعنی } \frac{۲۱}{۲} \text{ ہوں گے کیونکہ اگر } ۲۱ \text{ اشیا کے دو پارسل}$$

بنائے جائیں تو وہ دو طرح سے دو شخصوں کو دئے جاسکتے ہیں

$$\text{اسی طرح سے اگر صابطہ } \frac{۱+۲+۳}{۱} \text{ میں } ۱=۲=۳=۴$$

اور پارسلوں کی ترتیب میں کچھ تمیز نہ کی جائے تو ۱، ۲، ۳، ۴ اشیا کے پارسلوں کو باہم ترتیب دینے کے ۲۴ طریقے متماثل ہوں گے۔

اسلئے ۲۴ اشیا میں سے ۱، ۲، ۳ اشیا کے تین پارسل بنانے کے

$$\text{مختلف طریقے} = \frac{۲۴}{۳} = ۸$$

اگر ان پارسلوں کو تین شخصوں میں تقسیم کرنا ہو تو ایسا کرنے کے

کل طریقے $\frac{3!}{3!(1!)} \times 3!$ یعنی $\frac{3!}{3!(1!)}$ ہونگے کیونکہ پارسل جب ایک دفعہ بن گئے تو وہ تین اشخاص میں ۳ طرح سے تقسیم ہو سکتے ہیں پس معلوم ہوا کہ ۳ اشخاص میں سے ہر ایک کو ۱ مال اشیا دینے کے مختلف طریقے $\frac{3!}{3!(1!)}$ ہیں

مثال ۱۔ ۱۰ خطوط میں سے چھ چھ اور چار چار کے دو پارسل کتنی طرح سے بن سکتے ہیں؟

$$\text{مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \frac{10!}{4!4!} = 210$$

کتنی طرح سے ۱۰ خطوط دو اشخاصوں میں اس طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ ۶ ایک کو دستے جائیں اور ۴ دوسرے کو ۶ خطوط ایک شخص کو اور ۴ دوسرے کو دستے جاسکتے ہیں یا برعکس اسکے۔

$$\text{اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \frac{10!}{4!4!} = 210$$

مثال ۲۔ ۵ خطوط میں سے پانچ پانچ کے تین پارسل کتنی مختلف طرح سے بن سکتے ہیں؟

$$\text{مطلوبہ طریقوں کی تعداد} = \frac{5!}{3!2!} \times \frac{5!}{3!2!}$$

اگر ۵ خطوط میں سے پانچ پانچ خطوط تین مختلف مکانوں پر دینے مطلوب ہوں تو اس صورت میں طریقوں کی تعداد = پانچ پانچ خطوط

کے پارس بنانے کی تعداد کی ۳ گنی = $\frac{15}{(15)}$

امثلہ نمبری ۱۸

- ۱۔ ۵ حروف ا، ب، ج، د، ع میں سے چار چار حروف کی ایسی ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور انکی تعداد دریافت کرو
- ۲۔ ۵ حروف ا، ب، ج، د، ع کی وہ سب ترتیبیں مفصل لکھو جن میں ا حرف اول ہو اور ع حرف آخر یا برعکس اسکے۔ نیز ان کی تعداد دریافت کرو۔
- ۳۔ حاصل ضرب ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۶) میں کل اجزاء ضربی کی تعداد دریافت کرو۔
- ۴۔ حاصل ضرب ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳) اجزاء ضربی کی تعداد دریافت کرو۔
- ۵۔ اگر $۱۲ = ۳ \times ۴$ تو ن کی قیمت دریافت کرو۔
- ۶۔ ثابت کرو کہ $۱۲ = ۳ \times ۴$ ۔
- ۷۔ کسی لفظ میں ۴ حروف علت اور ۳ حروف صحیح شامل ہیں کتنی طرح سے ایک حرف علت اور ایک حرف صحیح ان میں سے اکٹھے منتخب ہو سکتے ہیں؟
- ۸۔ بت، پت، پتہ، پتہ، پتہ کی قیمتیں دریافت کرو۔
- ۹۔ اگر ن اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کا چار گت
- ن۔ ۱ اشیا میں سے تین تین اشیا کی ترتیبوں کے ۵ گنے کے برابر ہو

تو ن کی قیمت دریافت کرو

۱۰۔ "احد عشرہ" کے حروف سے کل کتنی ترتیبیں بن سکتی ہیں اور ان میں سے کتنی اسے شروع اور ح سے ختم ہونگی؟

۱۱۔ ہند سے ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۰ دئے ہوئے ہیں ان میں سے چار چار ہند سے لینے سے کتنے مختلف اجتماع بن سکتے ہیں اور اگر ان میں سے چار چار ہند سے لیکر مختلف اعداد بنائے جائیں تو ان کی تعداد کیا ہوگی؟

۱۲۔ اگر ج : ج = ۳ : ۴ تو ن کی قیمت دریافت کرو

۱۳۔ ۵ گھنٹوں میں سے سب کے سب اکٹھے بچنے سے کل کتنی مختلف آوازیں پیدا ہو سکتی ہیں؟

۱۴۔ ۷ گھنٹے سب کے سب اکٹھے کتنی مختلف طرح سے بچ سکتے ہیں اگر سب سے اونچی آواز سب سے آخر ہو؟

۱۵۔ کتنی راتوں کو ۲۴ ملاحوں میں سے چار چار آدمیوں کے مختلف پہرے لگ سکتے ہیں اور ان میں سے کتنے پہروں میں ایک خاص آدمی شامل ہوگا؟

۱۶۔ اگر ت اور ق ہمیشہ اکٹھے رہیں تو معلوم کرو کہ لفظ "مقاربہ" کے حروف آپس میں کل کتنی طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں۔

۱۷۔ کسی قصبائی کونسل میں ۲۵ مشیر اور ۱۰ جاگیردار ہیں معلوم کرو کہ ان میں سے کل کتنی کمیٹیاں بن سکتی ہیں جبکہ ہر ایک کمیٹی میں ۵ مشیر اور ۳ جاگیردار ہوں۔

۱۸۔ کل چھ حروف ہیں، تین بڑے چھاپے کے اور تین چھوٹے کے، ان ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو جو (۱) بڑے حروف سے شروع ہوں۔ (۲) جو بڑے حروف سے شروع اور ختم ہوں۔

۱۹۔ ۵۰ اشیا میں سے ۴۶، ۴۶ اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت کرو

۲۰۔ اگر ج = ج ج، تو ج اور ج کی قیمتیں دریافت کرو۔
۲۱۔ کتنی طرح سے لفظ ”مجاولہ“ کے حروف آپس میں ترتیب دئے جاسکتے ہیں اگر ج اور ۵ ہمیشہ طاق مقامات میں رہیں۔

۲۲۔ ۴ افسر اور ۸ سپاہی ہیں، ان میں سے چھ چھ کی جماعتیں کتنی مختلف طرح سے منتخب ہو سکتی ہیں اگر ہر ایک جماعت میں (۱) صرف ایک افسر ہو (۲) کم از کم ایک افسر ہو۔

۲۳۔ ۱۰ شخصوں میں سے چار یا زیادہ اشخاص کی ایک جماعت کتنی طرح سے منتخب ہو سکتی ہے

۲۴۔ اگر ج = ج ج، تو ج کی قیمت دریافت کرو۔

۲۵۔ کسی ریلوے لائن پر ۱۵ اسٹیشن ہیں، کل ٹکٹوں کی تعداد دریافت کرو تاکہ ہر ایک اسٹیشن پر ایک مسافر کو باقی تمام اسٹیشنوں کے ٹکٹ مل سکیں۔

۲۶۔ تینس کے کھلاڑی ۶ انگریز اور ۵ ہندوستانی ہیں اگر ہر ایک طرف ایک انگریز اور ایک ہندوستانی اکٹھے کھیلیں تو معلوم

کرو کہ ایک ٹینس کی بازی کھیلنے کیلئے انتخاب کتنی طرح سے ہو سکتا ہے
 ۲۷۔ ۲۵ حروف صحیح اور ۵ حروف علت میں سے کل کتنے الفاظ
 بن سکتے ہیں جبکہ ہر ایک لفظ میں ۳ حروف علت اور ۲ صحیح ہوں۔
 ۲۸۔ ایک کتب خانہ میں ۲۰ لاطینی اور ۶ یونانی کتابیں ہیں اگر
 ان میں سے ۵ کتابیں منتخب کی جائیں جنہیں تین لاطینی اور دو یونانی ہوں
 تو بتاؤ کہ انکو منتخب کرنے اور ایک الماری کے خانے میں ترتیب دینے
 کے کل کتنے طریقے ہو سکتے ہیں۔

۲۹۔ کتنی طرح سے ۱۲ اشیاء شخصوں میں برابر برابر تقسیم ہو سکتی ہیں؟
 ۳۰۔ تین بڑے چھاپے کے حروف، ۵ حروف صحیح اور ۴
 حروف علت میں سے ایسے الفاظ بنانے مطلوب ہیں جو بڑے حروف سے
 شروع ہوں اور جن میں سے ہر ایک میں ۲ حروف علت اور ۳ حروف صحیح
 شامل ہوں، الفاظ کی تعداد دریافت کرو۔

۳۱۔ کسی ممبری کے انتخاب پر ۱۰، ۱۵، ۲۰ آدمیوں نے
 بالترتیب تین اصلاخ سے اظہار رائے کی درخواست کرنی ہے اگر
 کل آسیدوار ۴۵ ہوں تو معلوم کرو کہ ان کی تقسیم مختلف اصلاخ میں
 کل کتنی طرح سے ہو سکتی ہے۔

۳۲۔ ایک کشتی کے ۸ ملاح ہیں ان میں سے ۲ ایک طرف
 چو چلا سکتے ہیں اور ایک ایک طرف، معلوم کرو کہ کشتی میں ملاح کتنی
 طرح سے ترتیب دئے جا سکتے ہیں

۳۳۔ کتنی طرح سے ۱۰ امتحان کے پرچے اس طرح ترتیب
 دئے جا سکتے ہیں کہ سب سے اچھا پرچہ سب سے بُرے پرچے

کے ایک یا ایک سے زیادہ اجتماع متماثل یا متشابہ ہوں، یہ بیان کر دینا ضروری ہوگا کہ کن معانی میں ہم الفاظ مختلف اور متشابہ کو استعمال کرتے ہیں، اشیاء کے مختلف اور غیر متشابہ ہونے سے ہماری یہ مراد ہے کہ دیکھنے میں وہ مختلف ہیں اور ایک دوسری سے آسانی تیز ہو سکتی ہیں برعکس اس کے ہم لفظ متماثل یا متشابہ سے ایسی اشیاء تعبیر کرتے ہیں جو دیکھنے میں یکساں اور ہر طرح سے مشابہ ہیں اور ایک دوسری سے تیز نہیں ہو سکتیں۔

۱۶۴۔ فرض کرو کہ ہمیں ایسی بارہ کتابوں کو کسی طاق پر ترتیب دینا ہے جن میں سے ۵ لاطینی ہیں ۳ انگریزی اور باقی مختلف زبانوں میں۔

ہر ایک زبان کی کتابوں میں ایک مشترک خاصیت ہے جسکی وجہ سے وہ سب کی سب ایک ہی جنس میں شمار ہو سکتی ہیں لیکن اگر وہ ایک دوسری سے شناخت ہو سکیں تو ترتیبوں کی تعداد ۱۲ ہوگی کیونکہ بلحاظ ترتیب کے وہ ایک دوسری سے مختلف ہیں۔

اگر ایک زبان کی کتابیں ایک دوسری سے تمیز نہ ہو سکیں تو اس صورت میں ہمیں ۱۲ اشیاء کی ترتیبیں دریافت کرنی چاہئیں جب کہ ان میں سے ۵ ایک قسم کی ہیں اور ۴ دوسری قسم کی۔ یہ مسئلہ ان صورت میں ٹھیک طور پر شامل نہیں ہے جن کی ہم اوپر تحقیق کر چکے ہیں۔

۱۶۵۔ ن اشیاء میں سے ۴ متشابہ اشیاء ایک قسم کی ہیں، ۵ متشابہ اشیاء دوسری قسم کی، ۳ متشابہ اشیاء تیسری قسم کی اور باقی سب

مختلف، اگر سب اشیا کی اکٹھی ترتیبیں لگائی جائیں تو ان کی تعداد دریافت کرو۔

ن اشیا کو ہم ن حروف سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ حرف ا کی تعداد ۱ ہے، ب کی تعداد ۱، ج کی تعداد ۱ اور باقی سب حروف مختلف ہیں۔

فرض کرو کہ مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد لا ہے اب اگر ہم متشابه حروف ا کی جگہ ف مختلف حروف رکھ دیں تو لا ترتیبوں میں سے کسی ایک ترتیب سے ہی باقی ماندہ حروف کے مقامات بدلنے کے بغیر ہم ف نئی ترتیبیں پیدا کر سکتے ہیں۔ اسلئے اگر لا ترتیبوں میں سے ہر ایک میں اس قسم کی تبدیلی کی جائے تو ہمیں لا x ف ترتیبیں حاصل ہوں گی۔

اسی طرح سے اگر ق متشابه حروف ب کی جگہ ق مختلف حروف رکھ دئے جائیں تو ترتیبوں کی تعداد لا x ف x ق ہوگی۔ اسی طرح سے اگر د متشابه حروف ج کی جگہ د مختلف حروف رکھ دئے جائیں تو اخیر میں ترتیبوں کی تعداد لا x ف x ق x د ہوگی۔ لیکن اب حروف باکل مختلف ہیں اسلئے وہ آپس میں ان طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں۔

$$\therefore \text{لا} \times \text{ف} \times \text{ق} \times \text{د} = \text{ان}$$

$$\text{یعنی لا} = \frac{\text{ان}}{\text{ف} \times \text{ق} \times \text{د}}$$

اور یہ ترتیبوں کی تعداد مطلوبہ ہے۔

ایسی ہر ایک صورت جس میں سب اشیا مختلف نہ ہوں اسی طرح سے حل ہو سکتی ہے

مثال ۱۔ کتنی مختلف ترتیبیں لفظ "ترتبات" سے بن سکتی ہیں۔ جبکہ کل حروف ہر ایک ترتیب میں شامل ہوں۔

یہاں کل سات حروف ہیں جن میں سے چار ت ہیں دو ر اور ایک ا ہے۔ اسلئے ترتیبوں کی تعداد

$$105 = \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!1!} =$$

مثال ۲۔ لفظ "قططنطنیہ" کے حروف سے کل کتنے مختلف الفاظ بن سکتے ہیں اور ان میں سے کتنے الفاظ میں دونوں ن متصل ہو گئے؟

کل حروف ۸ ہیں جن میں سے دو ط ہیں، دو ن اور باقی مختلف اسلئے الفاظ کی تعداد مطلوبہ =

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 =$$

$$10080 = 5040 \times 2 =$$

اگر دونوں ن ہمیشہ اکٹھے رہیں تو ہم انہیں ایک حرف خیال کر سکتے ہیں اور ایسا کرنے سے ہمارے پاس صرف ۷ حروف رہیں گے جن میں سے دو ط ہیں اور ان کو آپس میں ترتیب دینے کے مختلف

$$\text{طریقے} = \frac{5!}{2!} =$$

$$2520 =$$

مثال ۳۔ حاصل ضرب اُس حروف کے حروف کتنی مختلف

طرح سے اکٹھے ترتیب دئے جا سکتے ہیں۔

کل حروف ۱۱ ہیں جن میں سے پانچ ۱ ہیں اور چار ع

اسلئے انہیں ترتیب دینے کے کل مختلف طریقے = $\frac{11!}{4! 7!}$

$$4 \times 2 \times 4 \times 10 \times 11 =$$

$$13840 =$$

مثال ۴۔ اگر طاق ہند سے ہمیشہ طاق مقامات پر لکھے جائیں تو معلوم کرو کہ مفصلہ ذیل سات ہندسوں سے کل کتنے مختلف اعداد بن سکتے ہیں۔

$$1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$$

طاق ہند سے ۱، ۳، ۳، ۱ ہیں ان کو چار طاق مقامات

میں ترتیب دینے کے طریقے = $\frac{4!}{2! 2!}$ ----- (۱)

جفت ہندسوں ۲، ۴، ۲ کو تین جفت مقامات میں ترتیب دینے

کے طریقے = $\frac{3!}{2! 1!}$ ----- (۲)

(۱) کا ہر ایک طریقہ (۲) کے ہر ایک طریقے سے منسلک ہو سکتا ہے

$$18 = 3 \times 4 = \frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{2! 2!} =$$

مثال ۵۔ دس لاکھ سے بڑے کتنے اعداد سات ہندسوں

۱، ۳، ۲، ۴، ۳، ۲، ۱ بن سکتے ہیں

چونکہ ہر ایک عدد میں کم از کم سات ہندسے ہونے چاہئیں اسلئے ہمیں اوپر کے سب ہندسے اکٹھے استعمال کرنے پڑیں گے۔

اب ان سات ہندسوں میں دو ۲ ہیں اور تین ۳ اسلئے
 انہیں آپس میں ترتیب دینے کے مختلف طریقے $= \frac{7!}{2!3!} = 350$
 لیکن ان میں دو ترتیبیں بھی شامل ہیں جن میں بائیں طرف سب
 سے پہلا ہندسہ صفر ہے چونکہ وہ اعداد مطلوبہ نہیں ہیں اسلئے انہیں
 خارج کرنا چاہیئے۔

صرف صفر سے اس طرح شروع ہونے والی ترتیبوں کی تعداد
 وہی ہے جو باقی ۶ ہندسوں کو آپس میں ترتیب دینے کی تعداد ہے

$$\text{اسلئے انکی تعداد} = \frac{6!}{2!3!} = 60$$

$$\text{پس تعداد مطلوبہ} = 350 - 60 = 290$$

۱۶۶۔ ن اشیا میں سے ر اشیا کی ترتیبیں اُس صورت میں
 دریافت کرو جبکہ ہر ایک شے کسی ایک ترتیب میں ایک مرتبہ، دو
 مرتبہ، تین مرتبہ، ر مرتبہ تکرار پا سکے۔

اس جگہ ن مختلف اشیا سے ر مقامات پر کرنے مطلوب ہیں
 جبکہ کسی ایک ترتیب میں ن اشیا میں سے کسی ایک شے کو ہم جتنی
 دفعہ چاہیں استعمال کر سکتے ہیں

پہلا مقام ن طرح سے پر ہو سکتا ہے۔ اور جب یہ کسی ایک طرح
 سے پر ہو جائے تو دوسرا بھی ن طرح سے پر ہو سکتا ہے کیونکہ
 شرائط سوال سے ایک ہی شے کو دوبارہ استعمال کرنے کی اجازت
 ہے۔ اسلئے پہلے دو مقامات پر کرنے کے طریقے ن × ن یا ن^۲
 ہیں تیسرا مقام ن طرح سے پر ہو سکتا ہے اور اسلئے پہلے تین

مقامات ۳ طریقوں سے پڑ ہو سکتے ہیں۔

اسی طرح عمل کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ہر ایک منزل پر ۳ مقامات کا قوت نامہ پڑ کردہ مقامات کی تعداد کے برابر ہے اسلئے مقامات پڑ کرنے کے کل طریقے ۳ ہیں

مثال۔ کسی اسکول کے سالانہ جلسہ پر ۵ انعام ۴ لڑکوں کو دیئے جائیں گے۔ اگر ہر ایک لڑکا ایک یا ایک سے زیادہ انعاموں کا مستحق ہو سکے تو معلوم کرو کہ کتنی طرح سے انعام تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پانچ انعاموں میں سے کوئی سا انعام ۴ طریقوں سے دیا جاسکتا ہے اور پھر باقی ماندہ انعاموں میں سے کوئی سا ۳ طریقوں سے دیا جاسکتا ہے کیونکہ یہ اُسی لڑکے کو دیا جاسکتا ہے جو پہلے انعام لے چکا ہے۔ اس طرح سے دو انعام ۴ طریقوں سے اور تین انعام ۴ طریقوں سے تقسیم ہو سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اسلئے پانچوں انعام ۴ یعنی ۱۰۲۴ طرح سے تقسیم ہو سکتے ہیں۔

۱۶۔ ۳ اشیا میں سے چند یا سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو۔

ایسے انتخابوں میں ہر ایک شے پر دو طرح کا عمل ہو سکتا ہے یا نہ ہو سکتی ہے یا چھوڑی جاسکتی ہے اور چونکہ ایسے طرز عمل کے مختلف طریقے آپس میں منسلک ہو سکتے ہیں اس لئے ۳ اشیا پر ایسا عمل کرنے کے کل طریقے

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots \dots \dots \text{۳ اشیا پر ہر ایک شے پر دو طرح کا عمل ہو سکتا ہے یا نہ ہو سکتی ہے یا چھوڑی جاسکتی ہے}$$

مگر اس میں وہ صورت بھی شامل ہے جس میں تمام اشیا چھوڑ دی گئی

ہیں اور کوئی منتخب نہیں کی گئی! سنے اگر اسکو خارج کر دیا جائے تو مطلوبہ
 طرقوں کی تعداد ۱۲-۱ ہوگی۔

اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ ن اشیا کے تسلسل ممکن
اجتماعوں کی تعداد "۱-۲-۳" ہے

مثال - ایک شخص کے 4 دوست ہیں وہ اُن میں سے ایک یا زیادہ کو کتنی طرح سے مہمان بلا سکتا ہے؟

اُسے اپنے چم اجاب میں سے چند یاب کے سب متعجب کرنے ہیں۔

اسلئے کل طریقے = $2 - 1 = 1$

اس کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے

مہمانوں میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، بلائے

جاسکتے ہیں۔ اسلئے انتخابوں کی کل تعداد $ج + ج + ج + ج + ج + ج$

$$4P = 1 + 4 + 10 + 20 + 10 + 4 =$$

۱۶۸۔ رکی کس قیمت کے لئے نیا بنائیں سے راز انشا

کے اجتماعوں کی تعداد بڑی سے بڑی ہوگی؟

سلسلہ ج، ج، ج، ج

پیشواری

ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ اس سلسلے کی کون سی رقم سب سے بڑی

ہے یا دوسرے الفاظ میں ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ (۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷

کون سی قیمت رکودی جائے کہ بیج کی قیمت بڑی سے بڑی ہو

$$\frac{(1+r)^n(1+r)^n \dots (1+r)^n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} = \text{چونکہ ج}$$

$$\text{اور } ج = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲).....(ن-۲+۱)}{(۱-۲).....۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰ \times ۱۱ \times ۱۲ \times ۱۳ \times ۱۴ \times ۱۵ \times ۱۶ \times ۱۷ \times ۱۸ \times ۱۹ \times ۲۰ \times ۲۱ \times ۲۲ \times ۲۳ \times ۲۴ \times ۲۵ \times ۲۶ \times ۲۷ \times ۲۸ \times ۲۹ \times ۳۰}$$

$$\text{اسلئے } ج = ج \times \frac{۱+ن}{ن}$$

ضارب جز ضربی $\frac{۱+ن}{ن}$ اس صورت میں بھی لکھا جاسکتا ہے
یعنی $\frac{۱+ن}{ن} - ۱$ ، اس سے ظاہر ہے کہ جیسے ر کی قیمت بڑھتی ہے ویسے
اس جز ضربی کی قیمت گھٹتی ہے پس اگر ر کو قیمتیں ۱، ۲، ۳،
بالترتیب دی جائیں تو ج کی قیمت متواتر بڑھتی جائے گی جب تک کہ
جز ضربی $\frac{۱+ن}{ن} - ۱$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے۔

$$\text{اب } ۱ < ۱ - \frac{۱+ن}{ن}$$

$$\text{جب تک کہ } ۲ < \frac{۱+ن}{ن}$$

$$\text{یعنی } \frac{۱+ن}{ن} < ۲ \text{ (۱)}$$

اس نسبت غیر مساوی کے موافق ہمیں ر کی بڑی سے بڑی قیمت
دریافت کرنی ہے۔

صورت اول اگر ن جفت ہو اور ۲ م کے برابر ہو تو

$$\frac{۱}{۲} + م = \frac{۱+۲م}{۲} = \frac{۱+ن}{۲}$$

اب اگر ر کو سب قیمتیں ۱، ۲، ۳، م تک (مع قیمت م
کے) یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان قیمتوں کے لئے $\frac{۱+ن}{۲}$ یعنی
 $\frac{۱}{۲} + م$ ہر ایک صورت میں ر سے بڑا ہے یعنی ر کی ایسی تمام

قیمتوں کے لئے شرائط نسبت (۱) پوری ہوتی ہیں اسلئے رکوم
یعنی $\frac{n}{p}$ کے مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں
اجتماعوں کی بڑی سے بڑی تعداد ج ہے
صورت دوم فرض کرد کہ n طاق ہے اور $2m+1$ کے برابر

ہے تو $1+n = \frac{2+2m}{2} = m+1$
اب اگر n کو تمام قیمتیں $1, 2, 3, \dots, m$ تک (مع قیمت m کے)
یکے بعد دیگرے دی جائیں تو ان سب قیمتوں کے لئے $\frac{1+n}{p}$
یعنی $m+1$ ہر ایک صورت میں r سے بڑا ہے لیکن جب $r = m+1$
تو جز فیضی $\frac{n - (r-1)}{r} = \frac{1+n - m - 1}{m+1} = 1$ اور

$$ج = 1 + ج = ج = ج = ج$$

اور اسلئے اجتماعوں کی تعداد اُس وقت بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ
 $\frac{1+n}{p}$ سے $\frac{1+n}{p}$ یا $\frac{1+n}{p}$ یا $\frac{1-n}{p}$ ، $\frac{1-n}{p}$ اشیائے
اجتماع بنائے جائیں اور حاصل دونوں صورتوں میں ایک ہی ہوگا۔
مثال۔ ایک شخص کے دس دوست ہیں وہ انہیں اس طرح
مہمان بلانا چاہتا ہے کہ ہر ایک دعوت میں مہمانوں کی تعداد ایک ہی
ہو اور کسی دو دعوتوں میں وہی مہمان نہ آئیں اگر وہ زیادہ سے زیادہ
ایسی دعوتیں دینا چاہے تو معلوم کرو کہ ہر تہ کتنے مہمان بلائے۔
مہمانوں کی مختلف جماعتیں = ج جہاں r مہمانوں کی تعداد ہے

$$ج = \frac{(10 \times 9 \times 8 \times \dots \times (r-12)(r-11))}{(1 \times 2 \times \dots \times (r-1))}$$

$$\frac{(۱۲-۲) \times ۸ \times ۹ \times ۶}{(۱-۲) \times ۲ \times ۱} = ج$$

$$\frac{ج}{ج} = \frac{۱۱}{۲}$$

$$ج < ج$$

$$۱۱-۲ < ۲$$

$$۱۱ < ۲$$

$$۱۱ < ۲ \quad (۱)$$

پس غیر مساوات (۱) کے موافق ر کی بڑی سے بڑی قیمت ۵ ہے معلوم ہوا کہ ۱ سے ہر مرتبہ ۵ مہان لانے چاہئیں۔

۱۶۹ - قاعدہ ترتیب اشیا دفعہ ۱۵۶ کی استعانت کے

بغیر ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے اجتماعوں کی تعداد دریافت ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن اشیا میں سے ر، ر اشیا کے کل اجتماع ج سے تعبیر ہوتے ہیں اور ن حروف ا، ب، ج، د وغیرہ ن اشیا معینہ کو تعبیر کرتے ہیں۔

حروف ا، ب، ج، د وغیرہ میں سے ا کو علیحدہ کر دو اور باقی

ن-۱ حروف میں سے ر-۱، ر-۱ اشیا کے ج اجتماع بناؤ اب

ان سب اجتماعوں کے ساتھ ا کو کلمہ تو معلوم ہو گا کہ ن اشیا میں

سے ر، ر اشیا کے ایسے اجتماع جن میں ا شامل ہے ج ہیں

اسی طرح سے اُن اجتماعوں کی تعداد جن میں ب شامل ہے ج۔
 ہیں اور اسی طرح ن حروف میں سے ہر ایک حرف کے لئے۔
 ا لئے $n \times j = r$ ر اشیا کے اجتماع جن میں ا شامل ہے
 + ر اشیا کے اجتماع جن میں ب شامل ہے + ر اشیا کے
 اجتماع جن میں ج شامل ہے + علیٰ ہذا القیاس
 لیکن اس طرح اجتماع بنانے میں ہر ایک اجتماع دفعہ مکرر آئیگا
 مثلاً اجتماع ا ب ج د (جس میں ر حروف ہیں) ایک ایک
 دفعہ اُن سب اجتماعوں میں واقع ہوگا جن میں ا شامل ہے جن میں
 ب شامل ہے جن میں ج شامل ہے اور علیٰ ہذا القیاس
 پس معلوم ہوا کہ

$$j_{n-1} = j_{n-1} \times \frac{n}{r} \\ \text{ن اور دیکھو کہ بالترتیب ن-۱ اور ر-۱ لکھنے سے}$$

$$j_{n-2} = j_{n-2} \times \frac{n-1}{r-1}$$

$$j_{n-3} = j_{n-3} \times \frac{n-2}{r-2} \text{ اسی طرح سے}$$

$$j_{n-r+1} = j_{n-r+1} \times \frac{n-r+1}{r}$$

$$j_{n-r+1} = n-r+1$$

عمودی سطروں کو آپس میں اکٹھا ضرب دو اور متماثل ارقام کو طرفین

سے خارج کرو تو حاصل ہوگا۔

$$\text{ہج} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r(r-1)(r-2) \dots 1}$$

$$160 - \text{نہایت کرد کہ } \text{ہج} + \text{ہج} = \text{ہج}$$

ہج سے اُن اجتماعوں کی تعداد تعبیر ہوتی ہے جو $n+1$ اشیا میں سے رار اشیا کٹھی لینے سے حاصل ہوتے ہیں اور جن میں ایک خاص شے ہمیشہ شامل ہوتی ہے نیز ہج اُن اجتماعوں کی تعداد ہے جو $n+1$ اشیا میں سے رار اشیا منتخب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور جنہیں وہ خاص شے شامل نہیں ہوتی۔

ان دونوں کا مجموعہ $n+1$ اشیا میں سے رار اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے برابر ہے۔

$$\text{ہج} + \text{ہج} = \text{ہج}$$

بطور ایک مثال کے اس نتیجے کو ہج کی قیمت سے ثابت کرو۔

$$161 - \text{اگر } n+1 \text{ اشیا میں سے } n \text{ متشابہ اشیا}$$

ایک قسم کی ہوں، n متشابہ اشیا دوسری قسم کی، n متشابہ اشیا تیسری قسم کی اور علیٰ ہذا القیاس تو ان میں سے چند یا سب کی سب اشیا منتخب کرنے کے کل ممکن طریقے دریافت کرو۔

ایسے انتخابوں میں n اشیا $n+1$ طرح سے استعمال میں آسکتی ہیں کیونکہ ہم ان میں سے $0, 1, 2, 3, \dots, n$ اشیا منتخب کر سکتے ہیں اسی طرح سے n اشیا $n+1$ طرح سے استعمال

میں آسکتی ہیں، راشیا ر+۱ طرح سے اور علیٰ ہذا القیاس
اسلئے سب اشیا کو استعمال میں لانے کے کل طریقے

(ف+۱)(ق+۱)(ر+۱)..... ہیں لیکن ان میں وہ طریقہ بھی شامل
ہے جب کوئی شے بھی منتخب نہ کی گئی ہو اس صورت کو خارج کرنے سے
کل مطلوبہ طریقوں کی تعداد = (ف+۱)(ق+۱)(ر+۱)..... - ۱
۱۷۲۔ جب کل اشیا مختلف نہ ہوں تو ان اشیا میں سے راشیا
کے اجتماع یا ترتیبیں معلوم کرنے کا عام قاعدہ ذرا پیچیدہ ہوگا لیکن اس کی
خاص صورتیں اس طرح حل ہو سکتی ہیں۔

مثال۔ لفظ "تمتنبیات" کے حروف سے چار چار حروف کے
(۱) اجتماع (۲) ترتیبیں کتنی مختلف طرح سے بن سکتی ہیں۔

یہاں ۵ مختلف اقسام کے ۸ حروف ہیں م، م، د، ت، و، ن، ن
ی و ا، چار چار حروف کے مجموعے مفصلہ ذیل حروف کو اکٹھا کرنے
سے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) دو متشابہ حروف ، دو اور متشابہ حروف

(۲) دو متشابہ ، دو مختلف

(۳) چاروں مختلف

(۱) یہ انتخاب پہلے طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ ۳ جوڑوں م، م و

ت، ت، و، ن، ن میں سے ہمیں صرف ۲ منتخب کرنے ہیں پس

اس قسم کے اجتماع پہلے = ۳

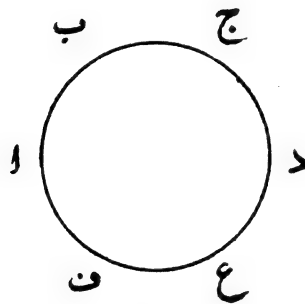
(۲) انتخاب ۳ x ۴ طرح سے ہو سکتا ہے کیونکہ حروف کا صرف ایک

جوڑا لینا ہے اور باقی ۴ قسم کے حروف میں سے دو حروف منتخب

خطی ترتیبوں سے ظاہر ہے

ا	ب	ج	د	ع	ف
ف	ا	ب	ج	د	ع

اور اگر انہی اشیا کو کسی دائرہ کے محیط پر ترتیب دیں تو اس سے جو ترتیبیں پیدا ہونگی اُن کو ہم مختلف نہیں خیال کر سکتے کیونکہ قوسی ترتیب دونوں کے لئے ایک ہے جیسا کہ شکل ذیل سے ظاہر ہے۔



اب اشیا کی جگہ فرض کر دو کہ گول میز کے گرد آدمی بیٹھے ہیں اگر ترتیب ا ب ج د ع ف بد لکرت ا ب ج د ع ہو جائے تو ظاہر ہے کہ حروف کے اصنافی مقامات میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوئی صرف سب کا سب نظام میز کے گرد بقدر ایک مقام کے گھوم گیا ہے اس قسم کی حرکت کو روکنے کے لئے جس سے کوئی نئی ترتیب حاصل نہیں ہوتی ہم ایک شخص کو ایک مقام میں متعین کر دیتے ہیں اور باقی اشخاص کو آپس میں مختلف طرح سے ترتیب دیتے ہیں مثلاً اگر ۶ آدمیوں کو

میز کے گرد بٹھانا منظور ہو تو ایک آدمی کی نشست قائم کر کے باقی
۵ کو آپس میں ۱۵ طرح سے ترتیب دینا چاہیئے۔

۱۷۴۔ موتیوں کے ہار

اگر ن مختلف موتیوں کو ایک ہار میں پرونا منظور ہو تو اُنہیں
مختلف طرح سے آپس میں ترتیب دینے کے طریقے $\frac{1}{n}!$ (ن-۱) ہوتے
کیونکہ فرض کرو کہ کسی ہار میں چھ موتی ہیں اور ان کی ترتیب گھڑی
کی سوئیوں کی موافق سمت میں ا ب ج د ع ف ہے (دیکھو شکل
وفعہ سابق)

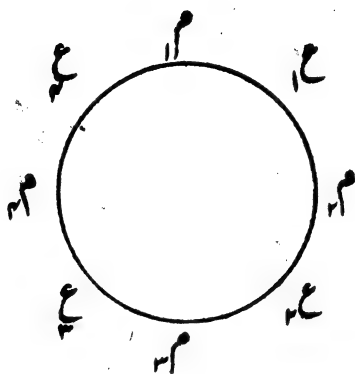
اب اگر ہار کو الٹ دیا جائے اور پہلی ترتیب کو اُسی سمت میں یعنی
موافق سمت ساعت پڑھا جائے تو وہ ف ع د ج ب ا ہوگی
پس معلوم ہوا کہ دو ترتیبیں جو اشخاص کی صورت میں مختلف سمتیں ہار
کی حالت میں ایک ہی ہیں۔

اسلئے ہار کے ن موتیوں کی مختلف ترتیبوں کی تعداد = ن اشخاص
کو گول میز کے گرد بٹھانے کی مختلف ترتیبوں کی نصف تعداد
کے $= \frac{1}{n}!$ (ن-۱)

مثال ۱۔ ۴ مرد اور ۴ بچوں کو ایک گول میز کے گرد اس طرح
بٹھانے کی کل مختلف ترتیبیں دریافت کرو کہ ہر ایک بچہ دو مردوں
کے درمیان ہو۔

ایک مرد کو کسی خاص مقام پر بٹھاؤ اور باقی ۳ کو آپس میں تمام
ممکن طریقوں سے ترتیب دو پس مردوں کو بٹھانے کے کل طریقے

= ۳ فرض کرو کہ مردوں کو بٹھانے کا ایک طریقہ شکل ذیل میں مندرج ہے جہاں م = مرد



تب صرف چار مردوں کے درمیان ۴ مقامات (ع، ع، ع، ع) ہیں جو بموجب شرائط سوال چار بچوں کے لئے مخصوص ہیں پس معلوم ہوا کہ مردوں کو بٹھانے کے ایک طریقے کے مقابل بچوں کو بٹھانے کے طریقے ۱۲ ہیں

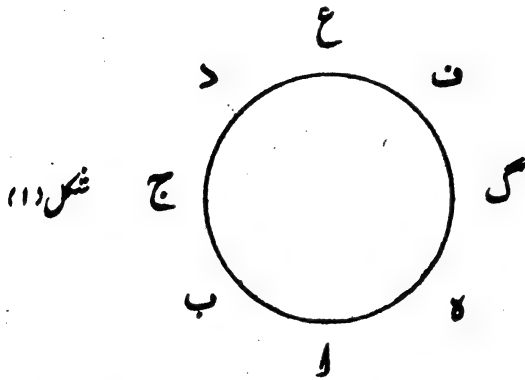
پس مطلوبہ طریقوں کی کل تعداد = ۳ × ۱۲ = ۳۶ = ۲۴ × ۳ = ۱۴۴

مثال ۲۔ کتنی طرح سے ۸ آدمی ایک گول میز کے گرد اس طرح بیٹھ سکتے ہیں کہ کسی دو ترتیبوں میں ان میں سے کسی کے دائیں بائیں وہی پہلو نشین نہ ہوں۔

ایک آدمی کو کسی ایک خاص مقام پر بٹھاؤ اور باقی سب کو آپس میں

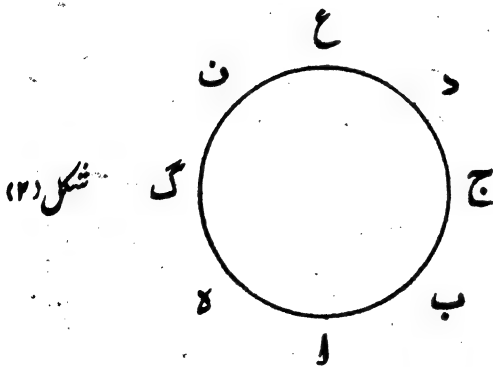
ترتیب دو ایسا کرنے کے کل طریقے = ۷! = ۵۰۴۰

فرض کرو کہ ایک ترتیب یہ ہے شکل (۱)



شکل (۱)

اگر و کو اپنی جگہ سے نہ ہلایا جائے تو صرف ۵۰۴ ترتیبوں میں ایک اور یہ ہوگی شکل (۲)



شکل (۲)

ظاہر ہے کہ اوپر کی دونوں ترتیبوں میں ۸ آدمیوں میں سے ہر ایک کے وہی پہلو نشین ہیں (مثلاً د کے دائیں بائیں پہلی اور دوسری ترتیب میں ج اور ع ہیں اگرچہ پہلی ترتیب کا دایاں سامنی دوسری

ترتیب میں بائیں طرف چلا گیا ہے) اور ہم دیکھتے ہیں کہ حروف
ب، ج، د، ع، ف، گ، ۛ کو خواہ کسی طرح سے گھڑی
کی سوئیوں کی موافق سمت میں ترتیب دیا جائے، بعینہ اُسی اسلوب
سے اُن کو سوئیوں کی مقابل سمت میں ترتیب دیا جاسکتا ہے اور
ظاہر ہے کہ اس قسم کی صرف دو ترتیبیں ایسی ہیں جن میں سب کے
سب ۸ شخصوں کے وہی پہلو نشین ہیں۔

پس بوجہ شرائط سوال ایسی دو ترتیبوں کو صرف ایک ترتیب
شمار کرنا چاہیئے اور اسلئے مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد $= ۵۰۴۰ \times \frac{۱}{۲} = ۲۵۲۰$
مثال ۳۔ ایک شخص م + ن دوستوں کو مہمان بلاتا ہے اور م
کو ایک گول میز کے گرد بٹھاتا ہے اور ن کو دوسری گول میز کے گرد
معلوم کرو کہ آپس میں مہمان کتنی طرح سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں۔
م دوستوں کی ایک جماعت منتخب کرتے وقت ہر دفعہ ن دوستوں
کی ایک جماعت باقی رہتی ہے پس م اور ن دوستوں کی مختلف جماعتیں

$$\text{بنانے کے مختلف طریقے} = \text{ج} = \frac{م + ن}{۲}$$

اب جماعتیں بنانے کے بعد وہ م دوستوں کو ایک میز کے گرد
۱۔ م طرح سے ترتیب دے سکتا ہے اور ن دوستوں کو دوسری
میز کے گرد ۱۔ ن طرح سے۔

اسلئے جماعتیں بنانے کے ہر ایک طریقے کے مقابل مہمانوں

کو آپس میں ترتیب دینے کے ۱۔ م \times ۱۔ ن طریقے ہیں

- ۹- کتنی طرح سے پانچ اشیا دو آدمیوں میں تقسیم ہو سکتی ہیں؟
- ۱۰- اگر ذیل کے جلوں کو مفصل لکھا جائے تو معلوم کرو کہ اُنکے حروف سے کل کتنی مختلف ترتیبیں بن سکتی ہیں (۱) 'ا ب ج' (۲) 'ا ب ج د'؟
- ۱۱- ایک قفل ابجد میں تین حلقے ہیں اور ہر ایک حلقے میں پندرہ مختلف حروف ہیں معلوم کرو کہ کتنی طرح سے قفل کھولنے کی ناکام کوشش ہو سکتی ہے؟
- ۱۲- پندرہ اصلاَح کی کثیر الاصلاَح کے تین تین زاویوں کو ملانے سے کل کتنے مثلث بن سکتے ہیں۔
- ۱۳- کسی کتب خانہ میں ایک کتاب کے نسخے ہیں، دو کتابوں میں سے ہر ایک کے ب، تین کتابوں میں سے ہر ایک کے ج اور د کتابوں کا صرف ایک ایک نسخہ ہے اگر یہ سب کی سب کتابیں اکٹھی پڑھنے کے لئے نکالی جائیں تو معلوم کرو کہ وہ کتنی طرح سے تقسیم ہو سکتی ہیں؟
- ۱۴- آٹھ ہندسوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ سے کتنے ایسے اعداد بن سکتے ہیں جو ۱۰۰۰۰ سے کم ہوں۔
- ۱۵- کتنی طرح سے ذیل کے انعام ۲۰ لڑکوں کی ایک جماعت میں تقسیم ہو سکتے ہیں۔ عربی کا اول اور دوم، ریاضیات کا اول اور دوم، طبیعیات کا اول، اردو کا اول؟
- ۱۶- کتنی طرح سے ۷ آدمی ایک حلقے میں بیٹھ سکتے ہیں اور کتنی طرح سے ۷ انگریز اور ۷ امریکن ایک گول میز کے گرد اس طرح

بیٹھ سکتے ہیں کہ کوئی دو امر یکساں کئے نہ ہوں؟
۱۷۔ کتنی طرح سے مختلف موتی ایک ہار کی شکل میں پروئے
جاسکتے ہیں؟

۱۸۔ کل سات حروف ہیں جن میں سے کچھ لاہیں اور باقی
سب مختلف، اگر ان سب کو اکٹھا ترتیب دیا جائے تو ان سے کل
اظاظ ۲۱۰ بنتے ہیں معلوم کرو کہ لا کتنے ہیں؟

۱۹۔ ایک تھیلی میں سات انگریزی کے ہیں ساورن، لفف
ساورن، کراؤن، فلورن، شننگ، پنس، فارونگ، کتنی طرح سے
کوئی ایک رقم تھیلی میں سے نکالی جاسکتی ہے۔

۲۰۔ ۳ نایل ۴ سیب اور ۲ نارنگیوں میں سے کل کتنے انتخاب
ہو سکتے ہیں اگر ہر ایک قسم کی کم از کم ایک غصے متعجب کیجائے۔

۲۱۔ م ن اشیا کو ن برابر حصوں میں تقسیم کرنے کے کل
مختلف طریقے دریافت کرو۔

۲۲۔ چار مختلف رنگ کی جھنڈیوں کو ایک دوسرے پر اکٹھا
کھا کرنے سے کل کتنے نشان بن سکتے ہیں اگر ان میں سے کوئی
سی تعداد ایک وقت کھڑی کی جاسکے۔

نیز معلوم کرو کہ ۵ جھنڈیوں سے کتنے نشان بن سکتے ہیں؟
۲۳۔ لفظ "امتداد" کے حروف میں سے تین تین حروف کو

اکٹھا ترتیب دینے سے کل کتنے حروف بن سکتے ہیں؟
۲۴۔ ن خطوط مستقیم ایک سطح کو کئی حصوں میں تقسیم کرتے

ہیں اگر ان میں سے نہ تو کوئی دو متوازی ہوں اور نہ کوئی تین

ایک نقطہ میں ملیں تو سطح کے حصوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۵۔ ایک سطح پر ۴ نقطے ہیں، ان میں سے کوئی تین ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں سوائے ق کے جو سب کے سب ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں، نقاط کو ملانے سے جو (۱) خطوط مستقیم (۲) مثلثات پیدا ہوں ان کی تعداد دریافت کرو۔

۲۶۔ اگر ۴ مختلف کتابوں میں سے ہر ایک کتاب کے ۴ نسخے ہوں تو ان میں سے کل ممکن انتخابوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۷۔ جملہ س ۲ ع ۲ پ ۲ ک ۲ ن ۲ و ی کے حروف میں سے چار چار حروف اکٹھے لینے سے جتنے اجتماع اور ترتیبیں بن سکیں انکی تعداد دریافت کرو۔

۲۸۔ جملہ ا ۲ ن ۲ ی ۲ ع ۲ ک ۲ م ۲ ٹ ۲ و کے حروف میں سے چار چار حروف کی ترتیبوں کی تعداد دریافت کرو

۲۹۔ ان سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ۱۰۰۰۰ سے بڑے ہوں اور ان ہندسوں ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ کو استعمال کرنے سے بنیں اور جن میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۰۔ ۱۰۰۰۰ سے بڑے ان سب اعداد کا مجموعہ دریافت کرو جو ہندسوں ۱۰، ۲، ۴، ۶، ۸ کو استعمال کرنے سے بنیں اور جنہیں سے کسی میں کوئی ہندسہ مکرر نہ آئے۔

۳۱۔ اگر ۴ ق + ۳ ر + ۲ ا + ۱ ی سے متشابه اشیا ایک طرح کی ہوں ق متشابه اشیا دوسری طرح کی اور باقی مختلف تو ثابت کرو کہ کل اجتماعوں کی تعداد (۴+۱)(۳+۱)(۲+۱)(۱+۱) ہے۔

۳۲ - ۲۴ حروف میں صرف حروف λ اور β شامل ہیں
 ثابت کرو کہ ترتیبوں کی تعداد بڑی سے بڑی اُس وقت ہوگی جب
 حروف λ کی تعداد حروف β کی تعداد کے برابر ہو۔

۳۳ - اگر n اعداد λ ، β ، γ ، δ سب مختلف
 ہوں اور n میں سے ہر ایک عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ جملہ
 λ ، β ، γ ، δ میں مختلف اجزاء ضربی کی تعداد $(n+1)!$ - ۱
 ہے۔

باب دوازدہم

استقرار حسابیہ

۱۷۵۔ اس ترکیب ثبوت کے موافق کسی مسئلہ عامہ کی صداقت اس کی کسی خاص صورت سے مستنبط ہوتی ہے، سب سے پہلے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ مسئلہ مجوزہ چند سادہ صورتوں کے لئے صحیح ہے یا نہیں، اس کے بعد ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر مسئلہ کسی ایک صورت کے لئے درست ہو تو اس سے اگلی صورت کے لئے بھی لازماً درست ہو گا، جب یہ بات بخوبی قائم ہو جائے تو ہمیں معلوم ہو گیا کہ اوپر کی تصدیق شدہ سادہ صورتوں سے اگلی صورت کے لئے مسئلہ صحیح ہے اور پھر اس سے اگلی صورت کے لئے اور ملنی بذالقیاس، اس طرح سے بعض اوقات ہم ایسے مسائل اور قوانین حسابیہ کی عمومیت ثابت کر سکتے ہیں جن کا ثبوت کسی طریق راست سے ناممکن محال ہو۔

امثلہ ذیل سے اس ترکیب ثبوت کی بخوبی توضیح ہوگی
مثال ۱۔ استقرار حسابیہ سے ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n-1) = n^2$$

دو رتوں کا مجموعہ صریحاً ۴ ہے نیز جب $n = 2$ تو

$\frac{1}{4} \times (1+n)(2+n) = \frac{1}{4} \times 2 \times 3 \times 4 = 6$ پس معلوم ہوا
کہ مسئلہ صحیح ہے جبکہ $n=2$

فرض کرو کہ سلسلہ کی n دیں رقم q_n سے تعبیر ہوتی ہے اور n
ارقام کا مجموعہ m ہے۔

$$تب \quad m = 1 + 2 + 3 + 4 + 10 + 15 + \dots + q_n$$

$$نیز \quad m = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 10 + \dots + q_{n-1} + q_n$$

اسلئے تفریق سے

$$0 - q_n = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots - n \text{ رقموں تک}) - q_n$$

$$اسلئے $q_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \text{ رقموں تک}$$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$سلسلہ کی n دیں رقم $= \frac{r(r+1)}{2}$$$

سلسلہ کی $(r+1)$ دیں رقم $= \frac{(r+1)(r+2)}{2}$ جہاں r کوئی عدد ہے
اب مان لو کہ مسئلہ صحیح ہے جب $n = r$
یعنی فرض کرو کہ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 10 + 15 + \dots + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

تب لازماً

$$1 + 2 + 3 + 4 + 10 + 15 + \dots + \frac{r(r+1)}{2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)}{2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{1}$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)}{1}$$

$$= \frac{1}{4}(1+2)(2+3)(3+4)$$

جس سے ظاہر ہے کہ مسئلہ اُس صورت میں بھی صحیح ہے جب $n = 1$ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ اگر مسئلہ متعدد ارقام کے لئے صحیح ہو خواہ وہ تعداد ارقام کچھ ہی ہو تو وہ اُس تعداد کے لئے بھی صحیح ہوگا جو مجوزہ تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ مسئلہ دو رقموں کے لئے صحیح ہے اس لئے وہ تین کے لئے بھی صحیح ہے، اسلئے چار کے لئے اور علیٰ ہذا القیاس پس معلوم ہوا کہ مسئلہ بالعموم صحیح ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ پہلے n طبعی اعداد کے مکعبوں کا مجموعہ

$$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ میں n کی بجائے عددی قیمتیں ۱ یا ۲ یا ۳ مندرج کرنے سے معلوم ہوگا کہ مسئلہ چند سادہ صورتوں میں صحیح ہے اس سے یہ قیاس پیدا ہوتا ہے کہ شاید یہ تمام صورتوں میں صحیح ہو۔ یہ مان لو کہ مسئلہ n ارقام کے لئے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

طرفین پر $(n+1)$ دیں رقم یعنی $(n+1)$ زیادہ کرو

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + (n+1)^3$$

$$= \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right\}^2$$

$$= (1+n)^2 \left\{ 1 + n + \frac{n^2}{2} \right\} - \frac{(1+n)^2 (n^2 + n + 1)}{2} = \left\{ \frac{(1+n)(2+n)}{2} \right\}^2 =$$

اور اس کی صورت وہی ہے جو ہم نے n ارقام کے مجموعے کے لئے فرض کی تھی صرف فرق یہ ہے کہ n کی بجائے $1+n$ لکھا ہوا ہے، دوسرے الفاظ میں یہ ثابت ہوا کہ اگر یہ نتیجہ کسی خاص تعداد ارقام کے لئے درست ہو خواہ وہ تعداد ارقام کچھ ہی ہو تو وہ اُس وقت بھی درست ہوگا اگر اُس تعداد کو بقدر ایک کے بڑھا دیا جائے۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ نتیجہ تین رقموں کے لئے درست ہے اسلئے معلوم ہوا کہ یہ چار رقموں کے لئے بھی درست ہے اسلئے پانچ رقموں کے لئے اور علیٰ اِذا لھتیاں پس ثابت ہوا کہ یہ نتیجہ بالعموم درست ہے

مثال ۳۔ n اجزائے ضربی ثنائی (بشکل لا+ا) معلوم ہیں، ان کا حاصل ضرب دریافت کرو۔

عمل ضرب سے

$$(1+a)(1+b)(1+c) = (1+a)(1+b+c) +$$

$$+ (1+b)(1+c+a) +$$

$$+ (1+c)(1+a+b) = (1+a)(1+b+c) +$$

$$+ (1+b)(1+c+a) +$$

+ (ا ب ج + ا ب + ا ج + ب ج + د) لا

+ ا ب ج د

ہم دیکھتے ہیں کہ ان نتائج سے مفصلہ ذیل قوانین صادق آتے ہیں
۱۔ بائیں طرف کی تعداد ارقام دائیں طرف کے اجزاء ضربی کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہے۔

۲۔ پہلی رقم میں لا کا قوت نما اجزاء ضربی کی تعداد کے برابر ہے اور باقی ہر ایک رقم میں لا کا قوت نما رقم ماقبل کے قوت نما سے بقدر ایک کے کم ہے

۳۔ پہلی رقم کا سر ایک ہے، دوسری رقم کا سر کل حروف ا ب ج ... کا مجموعہ ہے، تیسری رقم کا سر انہی حروف میں سے دو دو حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، چوتھی رقم کا سر انہی حروف میں سے تین تین حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اور علیٰ ہذا القیاس اور آخری رقم کا سر کل حروف کا حاصل ضرب ہے۔

مان لو کہ یہ قوانین ن۔۱ اجزاء ضربی کے لئے درست ہیں یعنی فرض کرو کہ (لا+ا) (لا+ب) (لا+ھ)

$$= لا^۱ + ض^۱ لا^۲ + ض^۲ لا^۳ + ض^۳ لا^۴ + + ض^۴$$

$$جہاں ض = ا + ب + ج + + ھ$$

$$ض = ا ب + ا ج + + ا ھ + ب ج + ب د + + د$$

$$ض = ا ب ج + ا ب د + + د$$

$$ض = ا ب ج ھ$$

طرفیں کو (لا+ک) میں ضرب دینے سے

(لا + ا) (لا + ب) ... (لا + هـ) (لا + ك)

$$= لا^0 + (ض + ك) لا^1 + (ض + ض + ك) لا^2 + \dots$$

$$+ (رضی + ضی ک) لا^۳ + \dots + ضی ک$$

$$ابض + ک = (ا + ب + ج + ... + ه) + ک$$

کل ن حروف ا ب ج ک کا مجموعہ

ض + ض ک = ض + ک (ا + ب + ه)

= ن حروف ا، ب، ج، ک میں سے

دو دو حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

ضی + ضی ک = ضی + ک (اب + اج + ... + اء + ب ج +)

= ن حروف اب ج ک میں سے تین تین

حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ

ض.ب.ک = کل ن حروف ا، ب، ج، ک کا حاصل ضرب

پیس معلوم ہوا کہ اگر یہ قوانین اُس صورت میں درست ہوں جبکہ صرف

(ن-۱) اجزائے مغربی کو آپس میں ضرب دی جائے تو وہ ن اجزاء

ضروری کی صورت میں بھی درست ثابت ہوتے ہیں، لیکن ہم نے عمل ضرب

سے اور ثابت کیا ہے کہ وہ چار اجزائے ضربی کے لئے درست ہیں

اسلئے وہ پانچ اجزائے ضربی کے لئے بھی درست ہیں اسلئے چھ کے

لئے اور علیٰ ہذا القیاس یعنی وہ بالعموم درست ہیں اسلئے

(لا+لا)(لا+ب)(لا+ج) (لا+ک)

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

جہاں $\text{م} = \text{کل ن حروف لا، ب، ج،} \dots \dots \dots \text{ک کا مجموعہ}$
 $\text{م} = \text{ن حروف میں سے دو دو حروف کے حاصل ضربوں کا مجموعہ}$

$\text{م} = \text{کل ن حروف کا حاصل ضرب}$
 ۱۷۱۔ عمل تقسیم کے متعلق کئی ایسے مسائل ہیں جو استقرار حسابیہ سے باسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔
 مثال۔ ثابت کرو کہ ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے لا-۱ جملہ لا-۱ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

عمل تقسیم سے $\frac{1-\text{لا}}{1-\text{لا}} = \frac{1-\text{لا}}{1-\text{لا}} + \frac{1-\text{لا}}{1-\text{لا}}$
 اس سے معلوم ہوا کہ اگر لا-۱، جملہ لا-۱ پر پورا تقسیم ہو سکے تو لا-۱ بھی لا-۱ پر پورا تقسیم ہو سکے گا مگر لا-۱ جملہ لا-۱ پر پورا تقسیم ہوتا ہے اس لئے لا-۱ بھی لا-۱ پر تقسیم ہو سکتا ہے اس لئے لا-۱ بھی اور علیٰ ہذا القیاس پس مسئلہ ثابت ہوا

اس باب کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ ترکیب استقرار صرف انہی مسائل کے ثابت کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے جن میں طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ن کی ترتیب کے موافق متسلل صورتیں پیدا ہوں

امثلہ نمبری ۲۰

استقرار حسابیہ سے ثابت کرو کہ

$$۱ - ۱ + ۳ + ۵ + \dots + (۲-ن) = ۲-ن$$

$$-۲ \quad ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲ + ۳ + \dots + ۲$$

$$\frac{1}{4} = \frac{n}{(1+n)(1+2n)}$$

$$-۳ \quad ۲ + ۲ + ۲ + \dots + ۲ + ۲ + \dots + ۲ = ۲(۲-۱)$$

$$-۴ \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{1+n}$$

-۵ اگر ن جفت ہو تو استقرار حسابیہ سے ثابت کرو کہ لا۔ مان

جملہ لا۔ مان پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

—————x—————

باب سیزدہم

مسئلہ شنائی

۷۷۔ ضرب دینے سے ظاہر ہے کہ

(لا + ا) (لا + ب) (لا + ج) (لا + د) = لا + (ا + ب + ج + د) لا
 + (ا + ب + ا + ج + ا + د + ب + ج + د) لا + (ا + ب + ج + د) لا
 + (ا + ج + د + ب + ج + د) لا + ا + ب + ج + د (۱)
 مگر سرسری نظر سے ہم اس نتیجہ پر پہنچ سکتے ہیں کیونکہ چار چار حروف
 کا مکمل حاصل ضرب اُن جزوی حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے جو دائیں طرف
 کے چار اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف منتخب کرنے اور انکو
 باہم ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں اگر ہم مختلف جزوی حاصل ضربوں
 کا بغور ملاحظہ کریں تو معلوم ہوگا کہ

(۱) رقم لا ہر ایک جزو ضربی سے حرف لا لینے سے بنتی ہے
 (۲) ارقام جن میں لا شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ تمام ممکن طریقوں
 سے حرف لا کو کسی تین اجزاء ضربی میں سے منتخب کیا جائے اور
 ساتھ ہی حروف ا، ب، ج، د میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ
 جزو ضربی سے لیا جائے۔

(۳) ارقام جن میں لا شامل ہے اس طرح بنتی ہیں کہ حرف لا کو
 کل ممکن طریقوں سے کسی دو اجزاء ضربی میں سے منتخب کیا جائے

اور ساتھ ہی حروف ا، ب، ج، د میں سے دو حروف کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی سے لیا جائے۔

(۴) ارقام جن میں لا شامل ہے حروف لا کو کسی ایک جزو ضربی سے اور حروف ا، ب، ج، د میں سے تین حروف کو باقی ماندہ اجزائے ضربی سے لینے سے بنتی ہیں۔

(۵) رقم مطلق یعنی وہ رقم جس میں لا شامل نہ ہو کل حروف ا، ب، ج، د کا حاصل ضرب ہے۔

مثال ۱۔ (۲-لا)(۳+لا)(۵-لا)(۹+لا)

$$= \text{لا} + (۲-۳+۵-۹) \text{لا} + (-۱۰+۱۸-۲۴+۳۵) \text{لا}$$

$$+ (۳۰-۵۴+۹۰-۱۳۵) \text{لا} + ۲۴۰$$

$$= \text{لا} + ۵ \text{لا} - ۴ \text{لا} - ۹۹ \text{لا} + ۲۴۰$$

مثال ۲۔ حاصل ضرب (۳-لا)(۵+لا)(۱-لا)(۲+لا)(۸-لا) میں لا کا سر عددی دریافت کرو۔

ارقام جن میں لا شامل ہے کسی تین اجزائے ضربی کے

حروف لا کو باقی ماندہ دو اجزائے ضربی کی دو عددی مقادیر کے ساتھ

ضرب دینے سے بنتی ہیں اسلئے سر عددی مطلوب مقادیر ۳، ۵، ۱، ۲، ۸ میں سے دو دو کے حاصل ضرب کے مجموعے

کے برابر ہے۔

$$\text{سر مطلوب} = ۱۵ + ۳ + ۴ + ۲۴ + ۵ - ۱۰ - ۲۰ - ۲ + ۸ - ۱۹$$

$$= ۳۹$$

۱۷۸۔ اگر مساوات (۱) دفعہ گزشتہ میں فرض کریں کہ

ارقام جن میں لان^۱ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں :- حرف لا کو کسی
ن-۱ اجزاء ضربی سے لو اور حروف ا، ب، ج، د، ک
میں سے ایک حرف کو باقی ماندہ جز ضربی سے لیکر ان سب حروف کو
اکٹھا ضرب دو اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لان^۱ کا سر حروف
ا، ب، ج، د، ک کے مجموعے کے برابر ہوگا اس کو
ص سے تعبیر کرو۔

ارقام جن میں لان^۲ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں :- حرف لا کو کسی
ن-۲ اجزاء ضربی سے لو اور حروف ا، ب، ج، د، ک
میں سے دو حروف کو دو باقی ماندہ اجزاء ضربی سے لیکر ان سب کو اکٹھا
ضرب دو اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لان^۲ کا سر حروف
ا، ب، ج، د، ک میں سے دو حروف کے حاصل
ضرب کے مجموعے کے برابر ہوگا اس کو ص سے تعبیر کرو۔

اور بالعموم ارقام جن میں لان^۳ شامل ہے اس طرح بنتی ہیں محرف
لا کو کسی ن-۳ اجزاء ضربی سے لو اور حروف ا، ب، ج، د، ک
میں سے ۳ حروف کو باقی ماندہ ۳ اجزاء ضربی سے لیکر ان سب کو اکٹھا
ضرب دو اس طرح سے آخری حاصل ضرب میں لان^۳ کا سر حروف
ا، ب، ج، د، ک میں سے ۳ حروف کے حاصل ضرب
کے مجموعے کے برابر ہوگا اس کو ص سے تعبیر کرو۔

آخری حاصل ضرب میں رقم آخر ا ب ج ک ہے اس کو
ص سے تعبیر کرو۔

اسلئے (لا+ا) (لا+ب) (لا+ج) (لا+ک)

$= ۱^n + ۱^{n-۱} + ۱^{n-۲} + \dots + ۱^{۱-۱} + ۱^{۰-۱} + ۱^{۰-۲} + \dots + ۱^{۰-n}$
 ص میں رقموں کی تعداد n ہے، ص میں رقموں کی تعداد وہی ہے
 چون اشیاء میں سے دو دو اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد ہے یعنی n ج،
 ص میں رقموں کی تعداد n ج ہے اور علی ہذا القیاس
 اب فرض کرو کہ حروف ب، ج، ک میں سے ہر ایک
 کے برابر ہے۔ اس صورت میں

ص = ج، ج = ص، ج = ص، ج = ص اور علی ہذا القیاس، پس

$(۱+۱)^n = ۱^n + ۱^{n-۱} + ۱^{n-۲} + \dots + ۱^{۱-۱} + ۱^{۰-۱} + ۱^{۰-۲} + \dots + ۱^{۰-n}$

اور ج، ج، کی جگہ ان کی قیمتیں رکھنے سے

$(۱+۱)^n = ۱^n + ۱^{n-۱} + ۱^{n-۲} + \dots + ۱^{۱-۱} + ۱^{۰-۱} + ۱^{۰-۲} + \dots + ۱^{۰-n}$

$+ \frac{n(n-۱)(۲-n)}{۳ \times ۲ \times ۱} ۱^{۰-۳} + \dots + ۱^{۰-n}$

اس سلسلہ میں تعداد ارقام $n + ۱$ ہے
 مضابطہ مندرجہ بالا کو مسئلہ شتائی کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور
 بائیں طرف کے سلسلہ کو $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی کہتے ہیں۔
 نتیجہ صریح۔ کی جگہ $(۱-۱)$ رکھنے سے

$\{ (۱-۱)^n = ۱^n + ۱^{n-۱} + ۱^{n-۲} + \dots + ۱^{۱-۱} + ۱^{۰-۱} + ۱^{۰-۲} + \dots + ۱^{۰-n} \}$
 $+ ۱^{۰-۳} + \dots + ۱^{۰-n}$

مسابیہ سے اس طرح ثابت ہو سکتا ہے -
مسئلہ کی صداقت قوت نمائے کے لئے مان لو
یعنی مان لو کہ

$$(1+n) = 1 + n + 1 + n + 1 + n + \dots + 1 + n + 1 + n + \dots$$

$$\text{جہاں } 1 + n = \frac{n(1-n)(2-n) \dots (n-2-n)(n-1-n)}{(1-n)}$$

طرفین کو لا + ۱ میں ضرب دینے سے

$$(1+n)(1+n) = 1 + n + 1 + n + 1 + n + \dots + 1 + n + 1 + n + \dots$$

$$+ 1 + n + 1 + n + \dots + 1 + n + 1 + n + \dots$$

$$= 1 + n + (1 + n) + (1 + n) + \dots + (1 + n) + (1 + n) + \dots$$

$$+ (1 + n) + (1 + n) + \dots + (1 + n) + (1 + n) + \dots$$

لیکن $1 + n + 1 + n + \dots$

$$= \frac{n(1-n)(2-n) \dots (n-2-n)(n-1-n)}{(1-n)} + \frac{n(1-n)(2-n) \dots (n-2-n)(n-1-n)}{(1-n)}$$

$$= \frac{n(1-n)(2-n) \dots (n-2-n)(n-1-n)}{(1-n)} \left\{ 1 + \frac{1+n}{1-n} \right\}$$

$$= \frac{n(1-n)(2-n) \dots (n-2-n)(n-1-n)}{(1-n)} \times \frac{1+n}{1-n}$$

مثال ۲- $(1-12)$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو۔
 $= 1 + 4 \times 1 + 15 \times 1 + 20 \times 1 + 15 \times 1 + 4 \times 1 + 1 = 64$

$$(1-12) = 1 - 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

$$- 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

اب چونکہ $12 = 12$ اسلئے اگر صرف 12 تک سرور یافت کئے جائیں تو باقی فوراً لکھے جا سکتے ہیں کیونکہ

$$12 = 12 \text{ اور } 12 = 12 \text{ وغیرہ اسلئے}$$

$$(1-12) = 1 - 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

$$- 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

$$= 1 - 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

$$+ 12 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

$$= 1 - 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

$$- 12 + 66 - 132 + 132 - 66 + 12 - 1$$

مثال ۳- $(1-12) + (1-12)$ کی قیمت دریافت کرو

اس مثال میں ایسی دو تفصیلی صورتیں ہیں جن کی ارقام عددی قیمت میں برابر ہیں لیکن دوسری صورت تفصیلی میں دوسری، چوتھی، چھٹی

آٹھویں رقمیں منفی ہیں اور اسلئے پہلی صورت تفصیلی کی رقوم متماثل کو
تا بود کر دیتی ہیں۔

$$\text{اسلئے مطلوبہ قیمت} = 2 \{ 1 + 21 \cdot 1^0 (1-1^2) + 35 \cdot 1^2 (1-1^2) \}$$

$$\{ 4 \cdot 1^3 (1-1^2) +$$

$$2 \cdot 112 \cdot 1^4 (1-1^2) + 54 \cdot 1^5 (1-1^2) \}$$

مثال ۴۔ $(\frac{1}{4} - 112)$ کو پھیلاؤ

$$(\frac{1}{4} - 112) (\frac{1}{4}) = \{ (\frac{1}{4} - 112) \cdot \frac{1}{4} \} = (\frac{1}{4} - 112)$$

$$= \frac{1}{128} \{ 1 - 112 + 112 \cdot \frac{1}{4} - (\frac{1}{4}) \cdot 112 + \dots \}$$

$$+ (\frac{1}{4})^2 \cdot 112 - 112 \cdot (\frac{1}{4})^2 + \dots \}$$

$$+ (\frac{1}{4})^3 \cdot 112 - 112 \cdot (\frac{1}{4})^3 + \dots \}$$

$$= \frac{1}{128} \{ 1 - 112 + 112 \cdot \frac{1}{4} - (\frac{1}{4}) \cdot 112 + \dots \}$$

$$+ (\frac{1}{4})^2 \cdot 112 - 112 \cdot (\frac{1}{4})^2 + \dots \}$$

$$= \frac{1}{128} \{ 1 - 112 + 112 \cdot \frac{1}{4} - (\frac{1}{4}) \cdot 112 + \dots \}$$

$$+ (\frac{1}{4})^2 \cdot 112 - 112 \cdot (\frac{1}{4})^2 + \dots \}$$

$$= \frac{1}{128} \{ 1 - 112 + 112 \cdot \frac{1}{4} - (\frac{1}{4}) \cdot 112 + \dots \}$$

$$= 148 - 112 + 148 - \dots$$

۱۸۲- (۱+۱) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو۔

پہلی رقم = ج لا-۱

تیسری رقم = ج لا-۲

چوتھی رقم = ج لا-۳

پانچویں رقم = ج لا-۴

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک رقم میں ج کا عدد آخر اُس رقم کی تعداد سے جو شروع سلسلہ سے اُس رقم تک ہو، بقدر ایک کے کم ہے اور لا کا قوت نامہ ہی ہے جو ج کا عدد آخر ہے نیز لا اور لا کے قوت ناموں کا مجموعہ ن ہے۔ اسلئے (۱+۱) دس رقم = ج لا-۱

اس کو سلسلہ کی رقم عامہ کہتے ہیں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اس میں درجہ مناسب عددی قیمتیں دینے سے ہم صورت تفصیلی کی کوئی سی رقم دریافت کر سکتے ہیں

پس رقم عامہ = (۱+۱) دس رقم

= ج لا-۱

= ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) (ن-۱) (ن-۱) لا-۱

۱

اگر (لا-۱) کی رقم عامہ مطلوب ہو تو ہمیں لا کی بجائے (لا-۱) لکھنا

چاہیے۔

پس (لا۔ ۱) کی رقم عامہ

$$= \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \dots (ن-۱+ن) (۱+ن-۱) (۱-۱)}{۱}$$

$$= (۱-۱) \times \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \dots (ن-۱+ن) (۱+ن-۱) (۱-۱)}{۱} =$$

اگر ہم مسئلہ ثانی کی صورت تفصیلی میں قر سے د دیں رقم تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ رقم ق_۱ میں لا شامل ہوگا نیز یہ صورت تفصیلی بمحافظ لا اور لا کے ایک جہد متجانسہ ہے یعنی اس کی ہر ایک رقم کے قوت نمائوں کا مجموعہ ن ہے پس معلوم ہوا کہ جس رقم میں لا شامل ہوتا ہے اس میں لا بھی شامل ہوگا

اسلئے ق_۱ = ج_۱ لا۔ ۱

$$= \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \dots (ن-۱+ن) (۱+ن-۱) (۱-۱)}{۱} =$$

$$اور ق_۲ = \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \dots (ن-۱+ن) (۲+ن-۱) (۱-۱) (۱+ن-۱)}{۱}$$

$$اسلئے \frac{ق_۱ + ۱}{ق_{۱}}}$$

$$یعنی ق_۱ = \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) \dots (ن-۱+ن) (۱+ن-۱) (۱-۱)}{۱} \times ق_{۱}}}$$

جس سے ہمیں دو متصل ارقام کا باہمی تعلق معلوم ہوتا ہے، نیز ظاہر ہے کہ ہم کسی رقم کو اسکی رقم ماقبل سے باسانی حاصل کر سکتے ہیں

مثال ۱- $(1+2+3+4)$ کی پانچویں رقم دریافت کرو
رقم مطلوبہ = ج.ج. $(2+3+4+5)$

$$= \frac{13 \times 14 \times 15 \times 16}{1 \times 2 \times 3 \times 4} =$$

$$= 380.80$$

مثال ۲- $(1-2+3-4)$ کی ۹۴ ویں رقم دریافت کرو۔
رقم مطلوبہ = ج.ج. $(1-2+3-4)$

$$= \text{ج.ج. } (1-2+3-4)$$

$$= \frac{39 \times 50}{1 \times 2} =$$

$$= 1225$$

مثال ۳- $(1+2+3+4)$ کی صورت تفصیلی میں ماکا سر دریافت کرو
فرض کرو جملہ مذکورہ کے پھیلاؤ کی $(1+2)$ دیں رقم میں ما واقع
ہوتا ہے۔

چونکہ $(1+2)$ دیں رقم = ج.ج. $(1+2+3+4)$

$$= \text{ج.ج. } 1+2+3+4$$

اور اگر اس میں ما شامل ہو تو ضرور ہے کہ

$$10-3=1 \text{ یعنی } 3=1$$

اس لئے مطلوب = ج.ج. 1×3

$$= \text{ج} \times \text{س} \times ۳ \times ۳$$

$$= \text{ج} \times \text{س} \times ۹$$

$$= ۱۰ \times \text{س}$$

مثال ۴ - (۷۲-۷۱) کی صورت تفصیلی میں لا^۳ کا سر دریافت کرو

$$\text{اب} \quad (۷۲-۷۱) = ۱ \times (۱ - \frac{۲}{۷})$$

اور چونکہ (۱ - $\frac{۲}{۷}$) کی صورت تفصیلی کی ہر ایک رقم کو لا^۳ سے ضرب دینی پڑتی ہے اس لئے ہمیں اس صورت تفصیلی میں اُس رقم کا سر دریافت کرنا ہے جس میں $\frac{۱}{۷}$ شامل ہو۔

$$\text{اس لئے سر مطلوب} = \text{ج} \times (۲-)$$

$$= \frac{۱۹ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$= ۳۳۶۰$$

مثال ۵ - (۷۱- $\frac{۱}{۷}$) کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو۔

فرض کرو کہ (۱+) دیں رقم میں لا شامل نہیں ہوتا
تب چونکہ (۱+) دیں رقم

$$= \text{ج} \times \text{لا}^{۵۳-} \times (-\frac{۱}{۷})$$

$$= \text{ج} \times (۱-) \times \text{لا}^{۵۳-}$$

اس لئے لازماً ۳- ۵۳- ۳- ۵۳- اور اس لئے ۵۳- ۳- ۵۳- ۳-

پس رقم مطلوبہ = $\text{ج}_n \times (1-)$

= $\text{ج}_n \times (1-)$

$$= \frac{\text{ن} \text{ } ۳۱}{\text{ن} \text{ } ۲۱} \times (1-)$$

مثال ۶- $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$ کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو
فرض کرو کہ صورت تفصیلی کی $(ع + ۱)$ ویں رقم میں لا واقع
ہوتا ہے۔

تب $(ع + ۱)$ ویں رقم = $\text{ج}_n \times (1-)^{ع-۱} \times (\frac{1}{3})^ع$

$$= \text{ج}_n \times (1-)^{ع-۱} \times (\frac{1}{3})^ع$$

لیکن جیسا ہم نے فرض کیا کہ اس رقم میں لا شامل ہوتا ہے اسلئے

$$۲-ن = ع = ر یا ع = \frac{۲-ن}{۵}$$

پس سر مطلوب = $\text{ج}_n = \text{ج}_n$

$$= \frac{\text{ن}}{\text{ن} \text{ } ۲۱} \times \frac{۱}{۵} \times (۲-ن)$$

اگر $\frac{۲-ن}{۵}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو صورت تفصیلی میں ایسی کوئی

رقم نہوگی جس میں لا شامل ہو۔

امثلہ نمبری ۲۱

ذیل کے شتائی جلو کو پھیلاؤ

- | | |
|-------------|-------------|
| ۱- (۳-۱۱) | ۲- (۱۱+۱۲) |
| ۳- (۱۱-۱۲) | ۴- (۱۱-۱۳) |
| ۵- (۱۱+۱۲) | ۶- (۱۱-۱۳) |
| ۷- (۱۱-۱۳) | ۸- (۱۱-۱۳) |
| ۹- (۱۱+۱۲) | ۱۰- (۱۱-۱۳) |
| ۱۱- (۱۱+۱۲) | ۱۲- (۱۱-۱۳) |
| ۱۳- (۱۱+۱۲) | |
- (۱۱+۱۲) = ۱۱ + (۱۱-۱۳) (ایسی ارقام جن میں جز ضربی ن شامل ہے) + ۱۱

اس میں فرض کرو کہ ن = ۰ تو (۱+۱۱) = ۱ + ۰ + ۱۱ یعنی

۱+۱=۱ معلوم کرو کہ غلطی کہاں ہے ؟

ذیل کے جلوں کی ارقام مطلوبہ کو لکھو اور مختصر کرو۔

- | | |
|-------------|-------------|
| ۱۴- (۱۱-۱۲) | ۱۵- (۱۱-۱۳) |
| ۱۶- (۱۱-۱۳) | ۱۷- (۱۱-۱۳) |
| ۱۸- (۱۱+۱۲) | ۱۹- (۱۱-۱۳) |
| ۲۰- (۱۱-۱۳) | |

$$۲۱ - \left(\frac{۲}{۱} - \frac{۳}{۲} \right) \text{ کی پانچویں رقم}$$

ذیل کے جملوں کی قیمتیں دریافت کرو

$$۲۲ - (۲۸ - ۱) + (۲۸ + ۱)$$

$$۲۳ - (۸ - ۱ - ۲) - (۸ + ۱ + ۲)$$

$$۲۴ - (۱ + ۲۸) - (۱ - ۲۸)$$

$$۲۵ - (۲ - ۱۸ - ۱) + (۲ + ۱۸ - ۱)$$

$$۲۶ - \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \right) \text{ کی درمیانی رقم دریافت کرو}$$

$$۲۷ - (۱ - \frac{۱}{۲}) \text{ کی درمیانی رقم دریافت کرو}$$

$$۲۸ - (۸۳ - \frac{۳}{۴}) \text{ کی دو درمیانی رقمیں دریافت کرو}$$

$$۲۹ - (۱۳ + \frac{۳}{۴}) \text{ میں } ۱۵ \text{ کا سر دریافت کرو}$$

$$۳۰ - (۱۵ - ۲) \text{ میں } ۱۵ \text{ کا سر دریافت کرو}$$

$$۳۱ - (۱ - \frac{۱}{۲}) \text{ میں } ۱۵ \text{ اور } ۱۳ \text{ کے سر دریافت کرو}$$

$$۳۲ - (۸۹ - \frac{۱}{۱۳}) \text{ کی } ۱۳ \text{ دین رقم دریافت کرو}$$

$$۳۳ - (\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۳}) \text{ کی وہ رقم دریافت کرو جس میں لا شامل نہ ہو}$$

$$۳۴ - \text{اگر } (۱ + \frac{۱}{۲}) \text{ کی صورت تفصیلی میں لا واقع ہو تو اس کا}$$

سر دریافت کرو۔

$$۳۵ - (۱ - \frac{۱}{۲}) \text{ کی صورت تفصیلی میں وہ رقم دریافت کرو}$$

جس میں لا شامل نہ ہو۔

$$۳۶ - \text{اگر } (۱ + \frac{۱}{۲}) \text{ کی صورت تفصیلی میں لا واقع ہو تو}$$

ن ۲۱

$$\text{ثابت کرو کہ اس کا سر} = \frac{۱}{۲} (۴ - ن) - \frac{۱}{۲} (۲ + ن) (۴)$$

۱۸۳- (۱+لا) ن کی صورت تفصیلی میں شروع اور اخیر سے متساوی الفضل رقموں کے سر برابر ہوتے ہیں شروع سے (د+۱) دیں رقم کا سر = ج
ظاہر ہے کہ اخیر سے (د+۱) دیں رقم کے پہلے ن + ۱- (د+۱) یا ن- د رقمیں ہونگی اسلئے اخیر سے (د+۱) دیں رقم شروع سے (ن-د+۱) دیں رقم ہوگی اور اس کا سر ن ج- ہوگا۔
اب چونکہ ج = ج- اسلئے مسئلہ ثابت ہوا

۱۸۴- (۱+لا) ن کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑا سر دریافت کرو۔
(۱+لا) ن کی رقم عامہ کا سر ج ہے اور ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ ن کی کس قیمت کے لئے اس کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہوگی۔
دفعہ ۱۶۸ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب ن جفت ہو تو سب سے بڑا سر ن ج ہے اور جب ن طاق ہو تو سب سے بڑا سر ج- یا ج- ہے اور یہ دونوں سر آپس میں برابر ہیں۔

۱۸۵- (۱+لا) ن کی صورت تفصیلی میں سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$(۱+لا) ن = لا (۱ + \frac{۱}{لا}) ن$$

چونکہ لا جملہ (۱+لا) ن کی ہر ایک رقم سے ضرب کھاتا ہے اسلئے کافی ہوگا کہ ہم صرف جملہ (۱+لا) ن کی صورت تفصیلی میں

بڑی سے بڑی رقم دریافت کریں۔

اگر $ق$ اور $ق_۱$ اس جملہ کی دیں اور $(۱+ر)$ دیں رقموں کو بالترتیب تعبیر کریں تو $ق_۱ = ق_۲ \times \frac{۱+ر-ن}{ر} \times (\frac{۱}{ل})$
 $= ق_۲ \times (۱ - \frac{۱+ن}{ر}) \times \frac{۱}{ل}$

ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے $ر$ بڑھتا ہے ویسے جزی فی $(۱ - \frac{۱+ن}{ر})$ گھٹتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ $(۱+ر)$ دیں رقم $ر$ دیں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہو سکتی، لیکن اُس وقت تک ضرور بڑی رہتی ہے جب تک کہ $(۱ - \frac{۱+ن}{ر}) \times \frac{۱}{ل}$ ایک کے برابر یا ایک سے کم نہ ہو جائے

$$۱ < (۱ - \frac{۱+ن}{ر}) \times \frac{۱}{ل} \quad \text{اب}$$

$$\frac{۱}{ل} < (۱ - \frac{۱+ن}{ر})$$

$$\text{یعنی} \quad ۱ + \frac{۱}{ل} < \frac{۱+ن}{ر}$$

$$\text{یا} \quad \frac{۱+ن}{۱ + \frac{۱}{ل}} < ر \quad \text{----- (۱)}$$

اگر $\frac{۱+ن}{۱ + \frac{۱}{ل}}$ صحیح عدد ہو تو اس کو $ع$ سے تعبیر کرو

اب اگر $ر = ع$ تو ضارب جزی فی $\frac{۱+ن-۱}{ر} \times (\frac{۱}{ل})$ ایک کے

برابر ہو جاتا ہے اور $(۱+ع)$ دیں رقم $ع$ دیں رقم کے برابر ہے

اور یہی دو رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{1+n}{1+\frac{1}{r}}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ک سے تعبیر کرو
اب r کی بڑی ہے بڑی قیمت جو نسبت غیر مساوی (۱) کے
مطابق ہے صریحاً ک ہے پس معلوم ہوا کہ (ک + ۱) دیں رقم
سب سے بڑی ہے۔

چونکہ ہمیں سب سے بڑی عددی رقم مطلوب ہے اس لئے جملہ
(لا - ۱) کے لئے بھی اوپر کا ثبوت کافی ہوگا پس کسی مثال
حسابیہ میں جملہ ثنائی کی دوسری رقم کی علامت کا خیال رکھنا ضروری
نہیں ہے بہتر ہوگا کہ ہر ایک مثال بغیر قاعدہ عامہ کی مدد کے
نکالی جائے۔

مثال ۱۔ اگر $لا = \frac{1}{r}$ تو $(1 + r + لا)$ کے پھیلاؤ میں سب
سے بڑی رقم دریافت کرو۔

r دیں اور $(1+r)$ دیں رقموں کو بالترتیب Q اور Q_1 سے
تعبیر کرو تب

$$Q_1 = \frac{1+r-1}{r} \times لا \times Q$$

$$= \frac{1-1}{r} \times \frac{r}{r} \times Q$$

اس لئے $Q_1 < Q$

جب تک کہ $1 < \frac{r}{r} \times \frac{1-1}{r}$

یعنی $۳۶ - ۳۷ < ۳$ یا $۳۶ < ۳۷$

اس نسبت غیر مساوی کے مطابق $ر$ کی بڑی سے بڑی قیمت
 ۵ ہے پس سب سے بڑی چھٹی رقم ہوئی اور اس کی قیمت

$$ج = ۵ \left(\frac{۳}{۳۶} \right) \times ج = ۵ \left(\frac{۳}{۳۶} \right) \times ج$$

$$= \frac{۵ \times ۳۳۳}{۳۶۳} =$$

مثال ۲۔ اگر $\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$ تو $(۲ + ۳۳)$ کی صورت تفصیلی میں
 بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

اسلئے اگر $ق$ سے $ر$ دیں رقم تعبیر کریں تو

$$ق = ۱۰ \times ۸ \times ۹ \times \frac{(۱ + ۲ - ۹)}{۳} \times \left(\frac{۳۳}{۳} \right) \times ۲ =$$

$$= \frac{۱۰ - ۲}{۳} \times \frac{۳۳}{۳} \times ق$$

اسلئے $ق < ۱۰$ جب تک کہ $\frac{۱۰ - ۲}{۳} \times \frac{۳۳}{۳} < ۱$ یعنی $\frac{۱۰ - ۲}{۳} \times \frac{۳۳}{۳} < ۱$ یا $\frac{۳۰}{۱۱} < ۱$

اس نسبت غیر مساوی کے موافق $ر$ کی بڑی سے بڑی قیمت

۲ سے اسلئے معلوم ہوا کہ تیسری رقم سب سے بڑی ہے اور اس کی

$$\text{قیمت} = \frac{۲۳}{۲۸} \times \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} \times ۹۲ = ۲ \left(\frac{۱۱}{۲} \right) \times \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} \times ۹۲ =$$

$$۲۵۹۲ = \frac{۸۱ \times ۹۲}{۴} =$$

مثال ۳۔ اگر لا = ۱ تو (۳ - ۲ لا) کی صورت تفصیلی میں
سب سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$۹ \left(\frac{۱۱}{۳} - ۱ \right) ۹۳ = ۹ (۳ - ۲ لا)$$

پس $۹ \left(\frac{۱۱}{۳} - ۱ \right)$ کی صورت تفصیلی پر ہی غور کرنا کافی ہوگا

$$\text{اس جگہ بلحاظ عددی قیمت کے } ق = \frac{۱۱ - ۹}{۳} \times \frac{۱۱}{۳} \times ق$$

$$= \frac{۲}{۳} \times ق$$

اسلئے $ق < ق$

جب تک کہ $۱ < \frac{۲}{۳} \times ق$

یعنی $۲۰ < ۵۰$

اسلئے تین تک کی سب قیمتوں کے لئے $ق < ق$ ہے
لیکن اگر $۳ = ق$ تو $ق = ق$ اور یہی سب سے بڑی رقمیں
ہیں پس معلوم ہوا کہ جو تھی اور پانچویں رقمیں عددی قیمت
میں مساوی ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں اور ان کی قیمت

$$= ۹۳ \times \frac{۲}{۳} = ۶۲$$

(لا ۱) = ج لا + ج لا + ج لا + + ج
 اسلئے ضرب دینے سے ج + ج + ج + + ج
 = رقم لا کا سر حاصل ضرب (لا ۱) (لا ۱) میں یعنی (لا ۱)
 کی صورت تفصیلی میں۔

$$\frac{۲۱}{۱۱} = ج + ج + ج + + ج$$

مثال ۲۔

اگر (لا ۱) = ج + ج لا + ج لا + + ج لا
 تو ذیل کے جہوں کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\begin{aligned} (۱) & ج + ج ۲ + ج ۳ + ج ۴ + + ج (۱ + ن) + ج (۱) \\ (۲) & ج + ج ۲ + ج ۳ + ج ۴ + + ج ن + ج (۲) \end{aligned}$$

سلسلہ (۱) = ج + ج + ج + ج + + ج

$$+ (ج + ج ۲ + ج ۳ + ج ۴ + + ج)$$

$$= ۲ + ن + \{ ۱ + + \frac{(۲-ن)(۱-ن)}{۲ \times ۱} + (۱-ن) + ۱ \}$$

$$= ۲ + ن + (۱ + ۱) = ۲ + ن + ۲ = ۴ + ن$$

سلسلہ (۲) کی قیمت معلوم کرنے کے لئے اس طرح عمل کرو

$$ج لا + ج لا ۲ + ج لا ۳ + ج لا ۴ + + ج ن + ج لا$$

$$= ن لا + ۱ + (۱-ن) لا + \frac{(۲-ن)(۱-ن)}{۲ \times ۱} لا + + لا$$

$$= ن لا + (لا ۱) = ۱ + ن لا$$

اب لا کو $\frac{1}{n}$ میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$(۳) \dots \frac{ج}{لا} + \frac{ج۲}{لا} + \frac{ج۳}{لا} + \dots + \frac{ج۱۰۰}{لا} = \frac{ج}{لا} (1 + \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا^۲} + \dots + \frac{1}{لا^{۱۰۰}}) \dots (۳)$$

$$(۴) \dots ج + ج۲ + ج۳ + \dots + ج۱۰۰ = ج (1 + لا + لا^۲ + \dots + لا^{۱۰۰}) \dots (۴)$$

اب اگر تعلقات (۳) اور (۴) میں دائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو آپس میں اکٹھا ضرب دیدیا جائے تو معلوم ہوگا کہ اس حاصل ضرب کی رقم مطلق یعنی ایسی رقم جس میں لا موجود نہ ہو سلسلہ مطلوبہ (۲) ہے

$$۱ \text{ سلسلے سلسلہ } (۲) = \frac{ج}{لا} (1 + لا + لا^۲ + \dots + لا^{۱۰۰}) (1 + \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا^۲} + \dots + \frac{1}{لا^{۱۰۰}}) \text{ کی اُس رقم کے جس میں لا شامل نہ ہو۔}$$

$$= \frac{ج}{لا} (1 + لا + لا^۲ + \dots + لا^{۱۰۰}) (1 + \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا^۲} + \dots + \frac{1}{لا^{۱۰۰}}) \text{ کی اُس رقم کے جس میں لا شامل نہ ہو}$$

$$= لا^n \text{ کا سر جملہ } (1 + لا + لا^۲ + \dots + لا^{۱۰۰}) \text{ میں}$$

$$= ج \times لا^n$$

$$= \frac{1 - لا^{۱۰۱}}{1 - لا}$$

$$\text{مثال ۳۔ } 1 - (1 + لا) + (1 + لا + لا^۲) - (1 + لا + لا^۲ + لا^۳) + \dots + (1 + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴) - \dots$$

$$= 1 - (1 + لا) + (1 + لا + لا^۲) - (1 + لا + لا^۲ + لا^۳) + \dots + (1 + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴) - \dots$$

$$\{ 1 - 1 + لا - لا + لا^۲ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۳ + لا^۴ - لا^۴ + \dots \}$$

$$= 1 - 1 + لا - لا + لا^۲ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۳ + لا^۴ - لا^۴ + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{لا کا سر جملہ (۱+لا) میں} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} \times ۲ - \text{لا کا سر جملہ (۱+لا) میں} \\ \text{لا} \times ۶ + \text{لا} \\ \text{لا} \times ۴ - \text{لا} \\ \text{لا} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times ۶ + \frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۳ \times ۲ \times ۱} \times ۴ - \frac{۸ \times ۹}{۲ \times ۱} =$$

$$\frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times ۴ -$$

$$۸۴ + \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۲}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} + ۷ \times ۸ \times ۳ \times ۲ - ۳۶ =$$

$$۳۶ = ۳۳۶ - ۳۷۲ = ۲۵۲ + ۳۳۶ - ۱۲۰ =$$

مثال ۳- اگر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں ۶ دیں، ۷ دیں
۸ دیں، ۹ دیں، رقیس بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ہوں تو

$$\frac{۱۲}{۳۳} = \frac{\text{ب} - ۱ - \text{ج}}{\text{ج} - ۲ - \text{ب}}$$

فرض کرو کہ مجوزہ جملہ ثنائی (لا+ما) ہے

$$\frac{۱}{لا} \times \frac{۱+۲-ن}{۲} = \frac{ق}{ق}$$

اسلئے لازماً

$$\frac{۱}{لا} \times \frac{۱+۲-ن}{۲} = \frac{ق}{ق} = \frac{ب}{۱} \quad (۱)$$

$$\frac{۱}{لا} \times \frac{۵-ن}{۲} =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1+2+\dots+n}{2} = \frac{Q}{2} = \frac{J}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{11} \times \frac{4-0}{2} =$$

$$\frac{b}{a} \times \frac{1 + a - n}{a} = \frac{q}{a} = \frac{2}{j} \quad (3)$$

$$\frac{6}{11} \times \frac{4-0}{8} =$$

$$\frac{b}{11} (5 - 0) = \frac{b}{1} \times 4 \quad \text{سے (1)}$$

$$\frac{1}{11}(1-0) = \frac{2}{11} \times 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{1}{y} (4-0) = \frac{2}{7} \times 1 \quad \therefore (3)$$

اسلئے $\frac{۶}{۱} - \frac{۷}{۲} = \frac{۷}{۲} - \frac{۸}{۳} = \frac{۱}{۱} = \frac{۷}{۲} - \frac{۸}{۳}$

یا ۶ب'ج-ج'۱۷=۱۷ج'-۱۸ب'د

۳ ب' ج = ۴ ج' - ۱۴ ب' د

۳ج (ب^۱-۱ج) = ۱۴ (ج^۲-ب^۲)

$$\therefore \frac{ج۱ - ب۱}{ج۲ - ب۲} = \frac{ج۳ - ب۳}{ج۴ - ب۴}$$

۱. مثله نمبری ۲۲

۱- (۱-۲ لا) (۱+۲ لا) کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو۔

" " " " " $(u-1)^2(u+1)$ - 2

۱۶- اگر $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں طاق رقوموں کا مجموعہ ۲^m ہو اور جفت رقوموں کا مجموعہ ۲^m ، تو ثابت کرو کہ

$$۲^m - ۲^m = (۱-۱)^n$$

۱۷- $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں دوسری، تیسری، چوتھی رقبے بالترتیب $۲^{۲۰}$ ، $۲^{۲۰}$ اور ۱۰۸۰ ہیں لا، ما، ن کی قیمتیں دریافت کرو۔

۱۸- $(۱+۲+۱)^n$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو

۱۹- $(۱+۲+۱)^n$ کی صورت تفصیلی دریافت کرو

۲۰- $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے ۲ دیں رقم دریافت کرو۔

۲۱- $(۱+\frac{1}{۲})^{۱۰}$ کی صورت تفصیلی میں اخیر سے $(۲+۲)$ دیں رقم دریافت کرو۔

۲۲- $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں $(۲+۱)$ دیں اور $(۲+۱)$ دیں رقبے برابر ہیں، ۲ کی قیمت دریافت کرو

۲۳- $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں ۳ دیں اور $(۲+۱)$ دیں رقوموں کے برابر ہیں، ۲ اور ۱ کا باہمی ربط دریافت کرو۔

۲۴- ثابت کرو کہ $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں درمیانی رقم

$$= \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۱-۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۱}$$

۲۵- $(۱+۱)^n$ کی صورت تفصیلی میں سروں کا مجموعہ

دریافت کرو۔

۲۶۔ (۱۵-۴ ب) کی صورت تفصیلی میں سرور کا مجموعہ دریافت کرو۔

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو اور (۱+لا) کی صورت تفصیلی میں رقموں کے سر ج، ج، ج، ج، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

۲۷۔ ج + ج + ج + ج + + ج = ن × ۱۰۲

$$۲۸۔ ج + \frac{ج}{۲} + \frac{ج}{۳} + + \frac{ج}{۱+ن} = \frac{۱+۱۰۲}{۱+ن}$$

$$۲۹۔ ج \cdot ج + ج \cdot ج + ج \cdot ج + + ج \cdot ج = \frac{ن(۱+ن)}{۱+ن}$$

$$۳۰۔ ج + \frac{ج}{۲} + \frac{ج}{۳} + + \frac{ج}{۱+ن} = \frac{ن(۱+ن)}{۲}$$

$$۳۱۔ (ج + ج) (ج + ج) (ج + ج) = ج \cdot ج \cdot ج \cdot ج \cdot ج (۱+ن)$$

$$۳۲۔ ج + \frac{ج}{۲} + \frac{ج}{۳} + \frac{ج}{۴} + + \frac{ج}{۱+ن} = \frac{۱+۱۰۳}{۱+ن}$$

$$۳۳۔ ج \cdot ج + ج \cdot ج + ج \cdot ج + + ج \cdot ج =$$

$$= \frac{ن(۱+ن)}{۱+ن}$$

کسی مقدار محدود سے تعداداً بڑھ نہ سکے خواہ ن کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو تو ایسے سلسلہ کو مستحق کہتے ہیں۔
 اگر کسی سلسلہ غیر متناہی میں ن کو کافی طور پر بڑھانے سے پہلی ن رقموں کا مجموعہ ہر ایک مقدار محدود سے بڑھ سکے تو ایسے سلسلے کو متنع کہتے ہیں۔

اگر ہم کسی سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ دریافت کر سکیں تو اس سے ہمیں آسانی معلوم ہو سیکے گا کہ سلسلہ مستحق ہے یا متنع کیونکہ ن کو کافی بڑھانے سے صورت اول میں سلسلہ کا مجموعہ ہمیشہ محدود رہے گا اور صورت دوم میں لا انتہا زیادہ ہوگا مثلاً

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

کی ن ارقام کا مجموعہ $\frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ اگر تعداداً لا ایک سے چھوٹا ہو تو ن کے لا انتہا بڑھنے سے یہ مجموعہ ایک محدود مقدار $\frac{1}{1 - 1}$ کے قریب قریب آتا جائیگا اور اس صورت میں سلسلہ مستحق ہوگا۔

اب اگر تعداداً لا ایک سے بڑا ہو تو پہلی ن رقموں کا مجموعہ $\frac{1 - 1}{1 - 1}$ ہوگا۔ اور ن کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم اس مجموعہ کو ہر ایک مقدار محدود کی نسبت بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ اس صورت میں سلسلہ مجوزہ متنع ہے۔

اگر لا = 1 تو پہلی ن رقموں کا مجموعہ = ن، اسلئے سلسلہ مجوزہ متنع ہے۔

اگر لا = 1 تو سلسلہ کی صورت یہ ہوگی۔

ص - (ص - ص) - (ص - ص) -
جس سے ظاہر ہے کہ ہم ہمیشہ ص سے کم رہتا ہے خواہ تعداد ارقام
کچھ ہی لی جائے۔ ثابت ہوا کہ سلسلہ مجوزہ مستحق ہے۔

مثلاً سلسلہ ۱- $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ مستحق ہے۔ لوکارتی سلسلوں کے باب میں ہم دیکھیں گے کہ اس کا مجموعہ ۲ ہے۔

نیز سلسلہ $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{7}{16} + \frac{9}{32} - \frac{11}{64} + \dots$ میں ہر ایک رقم تعداد اپنی رقم ماقبل سے کم ہے اسلئے سلسلہ متق ہے لیکن سلسلہ مندرجہ بالا دو سلسلوں کا حاصل جمع ہے اور وہ سلسلے یہ ہیں

(1) $+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-$

(۲) + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 ...

اب سلسلہ (۱) کا مجموعہ لوک ۲ ہے اور سلسلہ (۲) میں اگر تعداد ارتقام جفت ہو تو مجموعہ صفر ہوتا ہے اور اگر طاق ہو تو ایک پس معلوم ہوا کہ سلسلہ مجوزہ مستحق ہے اور اگر جفت تعداد ارتقام لی جائے تو اس کا مجموعہ لوک ۲ کے قریب آتا جاتا ہے اور اگر طاق تعداد لی جائے تو مجموعہ ۱ + لوک ۲ کے قریب آتا جاتا ہے۔

۱۴۲- اگر ایک سلسلہ غیر متناہی میں کسی رقم معینہ سے شروع ہو کر اُس کے بعد کی تمام رقمیں ایسی ہوں کہ ہر ایک رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل سے ایک ایسی مقدار سے تعدادِ اُم کی نسبت

ہو جو خود بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے۔ تو سلسلہ مستحق ہوگا
فرض کرو کہ سلسلہ مجوزہ صم + صم + صم + صم + صم +
ہے جس میں صم رقم معینہ ہے اور م ان رقموں کے مجموعہ کو
تعبیر کرتا ہے۔

$$\dots + \omega + \omega + \omega + \omega = \mu$$

$$= \left\{ \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_1} \times \frac{a_2}{a_2} + \frac{a_1}{a_1} \times \frac{a_2}{a_2} \times \frac{a_3}{a_3} + \dots + \frac{a_1}{a_1} \times \frac{a_2}{a_2} \times \frac{a_3}{a_3} \times \frac{a_4}{a_4} \times \frac{a_5}{a_5} \times \frac{a_6}{a_6} \times \frac{a_7}{a_7} \times \frac{a_8}{a_8} \times \frac{a_9}{a_9} \times \frac{a_{10}}{a_{10}} \right\}$$

اب بموجب شرائط سوال $\frac{ص}{ص}$ ، $\frac{ص}{ص}$ ، $\frac{ص}{ص}$ ،

میں سے ہر ایک نسبت کو سنے کم ہے جہاں تک ایک ایسی مقدار ہے جو خود ایک سے کم ہے۔

۱۔ اے م \geq ص $(1 + k^1 + k^2 + k^3 + \dots)$
 یعنی م $\geq \frac{ص}{1 - k}$

اسلئے ثابت ہوا کہ سلسلہ مستق ہے دعویٰ مذکورہ بالا میں طالب علم کو الفاظ ”کسی رقم معینہ سے شروع ہو کر اُس کے بعد“ کی ضرورت پر خاص توجہ کرنی چاہیئے۔

سلسلہ ذیل پر غور کرو

$$\dots + \text{ن}^{\text{ل}^{\text{و}}} + \dots + \text{م}^{\text{ل}^{\text{و}}} + \text{س}^{\text{ل}^{\text{و}}} + \text{ز} + \text{ا}$$

یہاں $\frac{صن}{ص} = \frac{ن لا}{1-ن} = (1 + \frac{1}{1-ن}) لا$

اب ن کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم اس نسبت کو لا کے اتنا

قریب لا سکتے ہیں جتنا چاہیں اور اگر ایسا کریں تو آخر کار ہر ایک رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل سے لاہوگی۔ پس اگر $\frac{1}{n} > \frac{1}{n-1}$ تو سلسلہ مستحق ہوگا۔

لیکن نسبت $\frac{صحت}{صحت-۱}$ ایک سے کم نہیں ہو سکتی جب تک کہ $\frac{n}{n-1}$ ایک سے کم نہ ہو یعنی جب تک کہ n بڑا نہ ہو $\frac{1}{n-1}$ سے۔ یہ ایک ایسے مستحق سلسلہ کی مثال ہے جس میں رقمیں کسی خاص مقام تک بڑھتی ہیں مگر اس کے بعد گھٹتی شروع ہوتی ہیں مثلاً

$$\text{اگر } لا = \frac{99}{100} \text{ تو } \frac{1}{100} = \frac{1}{لا}$$

اور رقمیں گھٹتی شروع نہیں ہوتیں جب تک کہ ۱۰۰ دیں رقم کی ذبت نہ آجائے

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ متع ہے۔

پہلی رقم = ۱

دوسری رقم = $\frac{1}{2}$

اگلی در رقموں کا مجموعہ $< \frac{2}{3}$

اگلی ۴ رقموں کا مجموعہ $< \frac{4}{5}$ [کیونکہ سب سے چھوٹی رقم $\frac{1}{5}$ ہے]

اگلی ۸ رقموں کا مجموعہ $< \frac{8}{9}$ اور اگلی ہذا القیاس

اسلئے سلسلہ مجوزہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ لاتنا ہی تک اسلئے سلسلہ متع ہے

مثال ۲۔ ایک سلسلے کی n میں رقم $\frac{n(n+1)}{2}$ لانا ہے۔ معلوم کرو کہ سلسلہ مستقیم ہے یا متعرج؟

$$\text{اس جگہ } \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{n(n+1)}{2} \div \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{2n} =$$

۱۔ سلسلے اگر n غیر متناہی ہو تو حد $\frac{ص_1}{ص_2} =$ لا

پس اگر $لا > 1$ تو سلسلہ مستقیم ہے

اگر $لا < 1$ تو سلسلہ متعرج ہے

اگر $لا = 1$ تو حد $\frac{ص_1}{ص_2} = 1$ اس صورت میں مزید تحقیق کی ضرورت ہوگی۔

مثال ۳۔ معلوم کرو کہ سلسلہ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$ مستقیم ہے یا متعرج؟

$$\text{اس جگہ حد } \frac{ص_1}{ص_2} = \frac{n^2(n-1)}{2n(n-1)} = لا \text{ جب } n \text{ غیر متناہی ہو}$$

پس اگر $لا > 1$ تو سلسلہ مستقیم ہے

اور اگر $لا < 1$ تو سلسلہ متعرج ہے

اگر $لا = 1$ تو سلسلہ کی صورت یہ ہوگی $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$ جو صریحاً متعرج ہے

مثال ۴۔ سلسلہ $1 + (1+f) + (1+f+f) + \dots$

$$+ \{1 + (1-f) + (1-f-f) + \dots\}$$

$$\text{میں حد } \frac{ص}{ص-۱} = \text{حد } \frac{۱+(۱-ن)ف}{۱+(۲-ن)ف} \times ب = ب$$

جب ن غیر متناہی ہو

اسلئے اگر ب > ۱ تو سلسلہ مستقیم ہے اور مجموعہ محدود ہے

امثلہ نمبری ۲۳

ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مستقیم ہیں۔

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۲ \times ۲} - \dots$$

$$۲ - ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

$$۳ - ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

محدود قیمتوں کے لئے

$$۴ - ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

ایک سے کم ہو

$$۵ - \text{ثابت کرو کہ اگر } ع < ۱ \text{ تو سلسلہ}$$

$$\text{مستقیم ہے } \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

معلوم کرو کہ ذیل کے سلسلے مستقیم ہیں یا متع؟

$$۶ - \frac{۱}{۲ \times ۱} + \frac{۱}{۳ \times ۲} + \frac{۱}{۴ \times ۳} + \frac{۱}{۵ \times ۴} + \dots$$

$$۷ - \frac{۱}{۱ \times ۱} - \frac{۱}{(۱+۱)(۱+۱)} + \frac{۱}{(۲+۱)(۲+۱)} - \frac{۱}{(۳+۱)(۳+۱)} + \dots$$

سے کم ہو“ بعض حالتوں میں جب $لا = ا یا لا = -$ تو بھی سلسلہ مستحق ہوگا لیکن فی الحال ایسی صورتوں پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔

ثابت کرو کہ مسئلہ ثنائی قوت بنا کی تمام منفی اور کسری قیمتوں کے لئے مستحق ہوگا اگر لا تعداداً ایک سے کم ہو جملہ $(ا + لا)$ کی صورت تفصیلی میں اگر صر اور صر سے $(ا + لا)$ دیں اور $ر$ دیں تبصر کی جائیں تو

$$\frac{صر + لا}{صر} = \frac{ا + ر - ن}{ر} \times لا = لا \left(1 - \frac{ا + ن}{ر} \right)$$

ظاہر ہے کہ جیسے $ر$ بڑھتا ہے ویسے $\frac{ا + ن}{ر}$ تعداداً گھٹتا ہے خواہ $ن$ کی کچھ ہی قیمت ہو

اسلئے جیسے $ر$ بڑھتا جائیگا ویسے جملہ $\left(1 - \frac{ا + ن}{ر} \right)$ بتدریج قیمت $ا -$ کے قریب قریب آتا جائے گا۔

اسلئے جب $ر$ غیر متناہی ہوگا تو نسبت $\left(1 - \frac{ا + ن}{ر} \right)$ لا متواتر $(- لا)$ کے قریب قریب آتی جائے گی اور آخر کار تعداداً ایک ایسی مقدار سے کم ہوگی جو خود بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہے۔

اسلئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں سلسلہ مستحق ہے۔

۱۹۴- فرض کرو کہ $ن$ کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو مثبت

منفی یا کمزور $ج (ن)$ سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے یعنی

$$ج (ن) = 1 + ن + لا + \frac{ن (ن - 1)}{۲} + لا + \frac{ن (ن - 1) (ن - ۲)}{۳} + لا + \dots$$

ذیل کی دفعات کے مطالعہ سے پیشتر طالب علم کو چاہیئے کہ
ن کی چند خاص خاص قیمتوں کے لئے جملات ذیل کی تفصیلی
صورتوں کو مشق کے طور پر لکھے مثلاً

ج (۴) ج (۸) ج (۲-) ج (۳-) ج (۱/۲) ج (م+ن) وغیرہ
ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو
ج (ن) = (۱+لا) ن اب ہم ثابت کریں گے کہ

ج (۱/ن) = (۱+لا) ن جہاں ر اور س مثبت صحیح عدد ہیں

اور ج (-ن) = (۱+لا) -ن جہاں ن مثبت (صحیح یا کسور) ہے
۱۹۵- اگر ا اور ب مثبت صحیح عدد ہوں اور ا+ب < ر

تو پ ج ر = پ ج ر + پ ج ر + پ ج ر + پ ج ر + پ ج ر + + پ ج ر
جہاں ع اشیا میں سے ر اشیا کے اجتماع پ ج ر سے تعبیر
ہوتے ہیں۔

اب چونکہ ا اور ب دونوں مثبت صحیح عدد ہیں اسلئے مسئلہ ثانی کی مدد سے

(۱+لا) = ۱ + پ ج لا + پ ج لا + پ ج لا + + پ ج لا + لا

اور (۱+لا) = ۱ + پ ج لا + پ ج لا + پ ج لا + + پ ج لا + لا

∴ ضرب دینے سے (۱+لا) = ۱ + مندرجہ بالا متناہی سلسلوں
کا حاصل ضرب۔

اس میں دونوں طرف لا کے سر آپس میں برابر ہیں یعنی

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \dots$$

تبصیر ہوتا ہے یعنی

$$ج(م) = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \dots$$

$$ج(ن) = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \dots$$

$$اور ج(م+ن) = 1 + \frac{(م+ن)}{1} + \frac{(م+ن)^2}{2} + \frac{(م+ن)^3}{3} + \dots$$

حاصل ضرب ج(م) × ج(ن) میں لا کاسر

$$= \frac{m}{1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} + \frac{n}{1} \times \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{1}$$

$$= \frac{1}{2} [m + m(m-1) + n(m-1) + n + \dots + n]$$

$$= \frac{1}{2} (م+ن) [بذریعہ مسئلہ داندرا ماند]$$

$$= لا کاسر جملہ ج(م+ن) میں$$

یعنی ثابت ہوا کہ حاصل ضرب ج(م) × ج(ن) میں لا کی کسی

قوت کا سر = جملہ ج(م+ن) میں لا کی اُسی قوت کا سر

اس لئے م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$ج(م) \times ج(ن) = ج(م+ن)$$

کیونکہ اگر لا بلحاظ عددی قیمت کے ایک سے کم ہو تو تینوں سلسلے

مستحق ہوتے ہیں اور اسی طرح سے

$$\text{ج (م)} \times \text{ج (ن)} \times \text{ج (ف)} = \text{ج (م+ن)} \times \text{ج (ف)} \\ \text{ج (م+ن+ف)} \text{ اور علیٰ ہذا القیاس}$$

$$\therefore \text{ج (م)} \times \text{ج (ن)} \times \text{ج (ف)} = \dots \times \text{ج (م+ن+ف+...)} \\ \text{اس مساوات میں فرض کرو کہ}$$

$$\text{م} = \text{ن} = \text{ف} = \dots = \frac{\text{ل}}{\text{س}} \text{ جہاں ر اور س مثبت صحیح عدد ہیں اور فرض کرو کہ ایسی مقادیر کی تعداد س ہے۔}$$

$$\therefore \text{ج} \left(\frac{\text{ل}}{\text{س}} \right) \times \text{ج} \left(\frac{\text{ل}}{\text{س}} \right) \times \dots \text{س اجزاء ضربی تک}$$

$$= \text{ج} \left(\frac{\text{ل}}{\text{س}} \right) + \frac{\text{ل}}{\text{س}} + \dots \text{س رقموں تک}$$

$$\therefore \left[\text{ج} \left(\frac{\text{ل}}{\text{س}} \right) \right]^{\text{س}} = \text{ج (ر)} = (1+\text{لا}) \text{ کیونکہ ر مثبت عدد ہے}$$

$$\therefore (1+\text{لا})^{\frac{\text{س}}{\text{ل}}} = \text{ج} \left(\frac{\text{ل}}{\text{س}} \right) = 1 + \frac{\text{ل}}{\text{س}} + \frac{\text{س} \left(\frac{\text{ل}}{\text{س}} - 1 \right)}{2} + \dots$$

اور یہ صورت تفصیلی مسئلہ ثانی کے کسری قوت نما کے لئے ہے۔
اب اگر منفی قوت نما کے لئے مسئلہ ثابت کرنا ہو تو حاصل ضرب

$$\text{ج (م)} \times \text{ج (ن)} \text{ میں ن کی بجائے } (-\text{م}) \text{ رکھو، تب}$$

$$\text{ج (م)} \times \text{ج (-م)} = \text{ج (-م)} = \text{ج (م-م)} = \text{ج (0)} = 1$$

$$\therefore \text{ج (-م)} = \text{ج (م)} = \frac{1}{\text{ج (م)}} = \frac{1}{(1+\text{لا})^{\frac{\text{س}}{\text{ل}}}}$$

$$\therefore (1-\text{لا})^{\frac{\text{س}}{\text{ل}}} = \text{ج (-م)} = 1 + (-\text{م}) + \frac{(-\text{م})^2 \text{ (-م-م)}}{2} + \dots$$

۱۹۸- مسئلہ ثانی کسی قوت ناکیلئے (یو لڑ کا ثبوت)

خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو مثبت، منفی، صحیح یا مکسور فرض کرو کہ ج (م) سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے

$$1 + م + لا + \frac{م(۱-م)}{۲ \times ۱} لا^۲ + \frac{م(۱-م)(۲-م)}{۳ \times ۲ \times ۱} لا^۳ + \dots$$

$$\text{پس ج (م)} = 1 + م + لا + \frac{م(۱-م)}{۲ \times ۱} لا^۲ + \frac{م(۱-م)(۲-م)}{۳ \times ۲ \times ۱} لا^۳ + \dots$$

$$\text{اور ج (ن)} = 1 + ن + لا + \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} لا^۲ + \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)}{۳ \times ۲ \times ۱} لا^۳ + \dots$$

اگر ہم ان سلسلوں کو اکٹھا ضرب دیں تو حاصل ضرب ایک ایسا سلسلہ لا کی قواء متصاعده میں ہوگا جس کے سروں کی ترکیب اور صورت غیر متبدل ہوگی خواہ م اور ن کچھ ہی ہوں۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر متبدل صورت معلوم کرنے کے لئے ہم م اور ن کو وہ قیمتیں دے سکتے ہیں جن سے عمل میں سہولت ہو

پس فرض کرو کہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں اس صورت میں ج (م) صورت تفصیلی جملہ (۱+لا) کی ہوگی اور ج (ن) صورت تفصیلی (۱+لا) کی اسلئے

$$\text{ج (م)} \times \text{ج (ن)} = (۱+لا)^۲ \times (۱+لا)^ن = (۱+لا)^{ن+۲}$$

لیکن اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو (۱+لا)^{ن+۲} کی صورت تفصیلی ہوگی

$$(۱) \dots\dots\dots + \frac{(۲+ن)(۱-ن)}{۲ \times ۱} + (۲+ن) + ۱$$

پس معلوم ہوا کہ تمام حالتوں میں حاصل ضرب ج (م) \times ج (ن) کی صورت تفصیلی (۱) ہوگی خواہ م اور ن کی قیمتیں کچھ ہی ہوں اور سابق طریق کتابت کے موافق ہم اس کو ج (م+ن) سے تعبیر کر سکتے ہیں اسلئے م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$ج (م) \times ج (ن) = ج (م+ن)$$

$$\text{نیز } ج (م) \times ج (ن) \times ج (ف) = ج (م+ن) \times ج (ف)$$

$$= ج (م+ن+ف)$$

اسی طرح عمل کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$ج (م) \times ج (ن) \times ج (ف) \dots\dots\dots \text{س اجزاء ضربی تک}$$

$$= ج (م+ن+ف+\dots\dots\dots \text{س رقموں تک})$$

فرض کرو کہ ان میں سے ہر ایک مقدار $\frac{۱}{س}$ کے برابر ہے جہاں ر اور س دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

$$\therefore \left\{ ج \left(\frac{۱}{س} \right) \right\}^س = ج (ر)$$

لیکن چونکہ مثبت صحیح عدد ہے اسلئے ج (ر) = (۱+لا)۔

$$\therefore (۱+لا) = \left\{ ج \left(\frac{۱}{س} \right) \right\}^س$$

$$\therefore (۱+لا)^{\frac{۱}{س}} = ج \left(\frac{۱}{س} \right)$$

لیکن ج (س) سلسلہ ذیل کو تعبیر کرتا ہے۔

$$+ 1 + \frac{س}{س} + لا + \frac{س(س-1)}{2 \times 1} + لا + \dots$$

$$\therefore (1+لا) س = 1 + \frac{س}{س} + لا + \frac{س(س-1)}{2 \times 1} + لا + \dots$$

جس سے مسئلہ ثانی کسری قوت نما کے لئے ثابت ہوا۔

اب اگر قوت نما منفی ہو تو اس طرح عمل کرو۔

یہ ثابت ہو چکا ہے کہ م اور ن کی سب قیمتوں کے لئے

$$ج(م) \times ج(ن) = ج(م+ن)$$

اس میں م کی بجائے (-ن) رکھو (جہاں ن مقدار مثبت ہے) تو حاصل ہوگا۔

$$ج(-ن) \times ج(ن) = ج(-ن+ن) = ج(0) = 1$$

چونکہ سلسلہ کی سب ارقام سوائے پہلی رقم کے نابود ہوتی ہیں

$$\therefore ج(ن) = \frac{1}{ج(-ن)}$$

لیکن ن کی کسی مثبت قیمت کے لئے ج(ن) = (1+لا)ن

$$\therefore ج(-ن) = \frac{1}{(1+لا)ن}$$

$$! (1+لا)ن = ج(-ن)$$

$$لیکن ج(-ن) = 1 + (-ن) + لا + \frac{(-ن)(-ن-1)}{2 \times 1} + لا + \dots$$

$$۱ \text{ سلسلے } (۱+لا) - ۱ = ۱ + (-ن) لا + \frac{(-ن)(-ن-۱) لا}{۲ \times ۱} + \dots$$

جس سے مسئلہ ثانی منفی قوت نما کے لئے بھی ثابت ہوا۔
پس یہ مسئلہ بالعموم قوت نما کی مثبت، منفی، کمزور، سب قیمتوں کے لئے ثابت ہوا۔

۱۹۹- مسئلہ ثانی کا ثبوت جو دفعہ گزشتہ میں دیا گیا ہے

وہ پورا تشفی بخش نہیں، اس میں غالباً طالب علم کو کئی مشکلات پیش آئیں گی۔ اس جگہ ہم فقط ایک بات کا ذکر کئے دیتے ہیں
جملہ ج (م) میں اگر ہم مثبت صحیح عدد ہو تو تعداد ارقام محدود ہوتی ہے ورنہ باقی سب حالتوں میں غیر محدود! اسلئے یہ تحقیق کرنا ضروری ہے کہ مساوات متماثلہ ج (م) \times ج (ن) = ج (م + ن) کا پورا پورا مفہوم کیا ہے اور اس کے صحیح ہونے کیلئے کن کن شرائط اور قیود کا خاص طور پر خیال رکھنا چاہیئے۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ اگر $لا > ۱$ تو ج (م)، ج (ن) ج (م + ن) تینوں سلسلے مستحق ہیں اور ج (م + ن) حاصل ضرب ج (م) \times ج (ن) کا حسابی قائم مقام ہے لیکن جب $لا < ۱$ تو مذکورہ بالا سب سلسلے متنع ہو جائیں گے اور انکے متعلق اس صورت میں ہم صرف یہی بیان کر سکتے ہیں کہ اگر سلسلہ ج (م) کو سلسلہ ج (ن) سے ضرب دید جائے تو حاصل ضرب کی پہلی ارقام ج (م + ن) کی پہلی ارقام کے متماثل ہونگی خواہ د کی کوئی محدود قیمت ہو

مثال ۱- (۱-لا) $\frac{۴}{۳}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$^2(-\lambda) - \frac{(1-\frac{3}{2})\frac{3}{2}}{2 \times 1} + (-\lambda)\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}(-\lambda-1)$$

$$+^2(-\lambda) - \frac{(2-\frac{3}{2})(1-\frac{3}{2})\frac{3}{2}}{3 \times 2 \times 1} +$$

$$+^3\lambda \frac{1}{14} + ^2\lambda \frac{3}{8} + \lambda \frac{3}{4} - 1 =$$

مثال ۲- جمله $(\lambda^3 + 2\lambda - 1)$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$^{3-}(\frac{\lambda^3}{2} + 1)^{2-} = ^{3-}(\lambda^3 + 2)$$

$$^2(\frac{\lambda^3}{2}) - \frac{(5-)(4-)}{2 \times 1} + (\frac{\lambda^3}{2})(4-) + 1 \} \frac{1}{2^2} =$$

$$\{ \dots + ^3(\frac{\lambda^3}{2}) - \frac{(4-)(5-)(4-)}{3 \times 2 \times 1} +$$

$$(\dots + ^3\lambda \frac{135}{4} - ^2\lambda \frac{55}{2} + \lambda 4 - 1) \frac{1}{14} =$$

مثال ۳- جمله $\sqrt{\lambda^2 - \lambda}$ کو چار رقموں تک پھیلاؤ

$$^{\frac{1}{2}}(\lambda^2 - \lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$$

$$^{\frac{1}{2}}(\frac{\lambda^2}{2} - 1) \lambda =$$

$$^2(\frac{\lambda^2}{2}) - \frac{(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}}{2 \times 1} + (\frac{\lambda^2}{2})\frac{1}{2} + 1 \} \lambda =$$

$$\{ \dots + ^3(\frac{\lambda^2}{2}) - \frac{(2-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2}}{3 \times 2 \times 1} +$$

$$\{ \dots - ^2\lambda \times \frac{1}{14} - ^2\lambda \times \frac{1}{8} - ^2\lambda \times \frac{1}{4} - 1 \} \lambda =$$

۲۰۰۔ رقم عامہ دریافت کرنے کے لئے اب ہمیں صواب

ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۱۳) لا استعمال کرنا

چاہیے کیونکہ رمز ن ج اُس صورت میں بالکل بے معنی ہے
جب ن منفی یا مکسور ہو۔

نیز رقم عامہ کا سرکبھی معدوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ
شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے کوئی ایک صفر کے برابر نہ ہو
اسلئے سلسلہ دویں رقم پر ختم ہوگا اگر ن - ۱ + ۱ = ۰

یعنی جب $د = ن + ۱$ ، لیکن چونکہ $د$ ایک مثبت عدد ہے
اسلئے یہ مساوات ناممکن ہوگی سوائے اُس صورت کے جبکہ قوت ن
ن مثبت صحیح عدد ہو، پس معلوم ہوا کہ مسئلہ ثانی کی صورت تفصیلی
میں (ن + ۱) ارقام ہوں گی اگر ن مثبت صحیح عدد ہو لیکن
باقی سب صورتوں میں رقموں کی تعداد غیر متناہی ہوگی۔

مثال ۱۔ (۱ + لا) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو
(د + ۱) دیں رقم = $\frac{۱}{۲} (۱ - \frac{۱}{۲}) (۲ - \frac{۱}{۲}) \dots \dots (۱۳ - \frac{۱}{۲})$ لا

= $\frac{۱ (۱ - ۱) (۳ - ۱) (۵ - ۱) \dots \dots (۲۲ - ۱) (۲۳ - ۱)}{۲}$

شمار کنندہ میں اجزاء ضربی کی تعداد د ہے اور ان میں سے د - ۱
منفی ہیں۔ اسلئے اگر ۱ کو ہر ایک جز ضربی سے لیکر علیحدہ اکٹھا
کیا جائے تو جملہ مندرجہ بالا اس طرح لکھا جاسکتا

ج۔

$$(1-1) \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2-2)}{(2-2)} \text{ لا}$$

لے

مثال ۲۔ (۱-ن لا) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

$$(1+1) \text{ دیں رقم} = \frac{1}{2} (1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2}) \dots (n-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}) \text{ (ن لا)}$$

لے

$$= \frac{1(1-n)(2-n) \dots (n-1)(n-1)}{(1-n)} \text{ لا}$$

ن لے

$$= \frac{1(1-n)(2-n) \dots (n-1)(n-1)}{(1-n)} \text{ لا}$$

لے

$$= \frac{1(1-n)(2-n) \dots (n-1)(n-1)}{(1-n)} \text{ لا}$$

لے

$$= \frac{1(1-n)(2-n) \dots (n-1)(n-1)}{(1-n)} \text{ لا}$$

لے

کیونکہ (۱-۱) = (۱-۱) = ۱ = ۱

مثال ۳۔ (۱-لا) کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

$$(1+1) \text{ دیں رقم} = \frac{1(2-1)(3-1) \dots (n-1)(1+1)}{(2-1)} \text{ (لا)}$$

لے

$$= \frac{1(2-1)(3-1) \dots (n-1)(1+1)}{(2-1)} \text{ لا}$$

لے

$$= \frac{1(2-1)(3-1) \dots (n-1)(1+1)}{(2-1)} \text{ لا}$$

$$= \frac{(1+2)(2+2)}{2 \times 1} \text{ لا } [\text{شمار کنندہ اور نسب نامہ سے}]$$

متماثل اجزاء ضربی کو دور کرنے سے

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ لا کا سر (۱+لا) کی صورت تفصیلی میں

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (3-1) \times (1-1) =$$

چونکہ (۱+۲) دیں رقم میں لا واقع ہوتا ہے

$$\frac{\frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{3}) \times (2-\frac{1}{3}) \times \dots \times (3-\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})} =$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (3-1) \times (1-1)}{(1-\frac{1}{3})} =$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (3-1) \times (1-1)}{(1-\frac{1}{3})} =$$

(۲) شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے صرف ۲ مثبت ہیں اور

باقی سب منفی

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (3-1) \times (1-1) =$$

امثلہ نمبری ۲۲

ذیل کے جملوں کو چار رتوں تک پھیلاؤ

$$\begin{array}{llll} 1 - (1+1)^{\frac{1}{2}} & 2 - (1+1)^{\frac{2}{3}} & 3 - (1+1)^{\frac{3}{4}} & 4 - (1+1)^{\frac{4}{5}} \\ 5 - (1+1)^{\frac{5}{6}} & 6 - (1+1)^{\frac{6}{7}} & 7 - (1+1)^{\frac{7}{8}} & 8 - (1+1)^{\frac{8}{9}} \end{array}$$

۶- $\frac{1}{2}-(\lambda+1)$	۸- $\frac{1}{3}-(\lambda+1)$	۹- $\frac{1}{4}-(\lambda+1)$
۱۰- $\frac{1}{5}-(\lambda+1)$	۱۱- $\frac{1}{6}-(\lambda+1)$	۱۲- $\frac{1}{7}-(\lambda+1)$
۱۳- $\frac{1}{8}-(\lambda+1)$	۱۴- $\frac{1}{9}-(\lambda+1)$	۱۵- $\frac{1}{10}-(\lambda+1)$

لکھو اور مختصر کرو

۱۶- $\frac{1}{2}-(\lambda+1)$	کی آٹھویں رقم
۱۷- $\frac{1}{3}-(\lambda+1)$	کی گیارہویں رقم
۱۸- $\frac{1}{4}-(\lambda+1)$	کی دسویں رقم
۱۹- $\frac{1}{5}-(\lambda+1)$	کی پانچویں رقم
۲۰- $\frac{1}{6}-(\lambda+1)$	کی (۱+د) دسویں رقم
۲۱- $\frac{1}{7}-(\lambda+1)$	کی (۱+د) دسویں رقم
۲۲- $\frac{1}{8}-(\lambda+1)$	کی (۱+د) دسویں رقم
۲۳- $\frac{1}{9}-(\lambda+1)$	کی (۱+د) دسویں رقم
۲۴- $\frac{1}{10}-(\lambda+1)$	کی چودھویں رقم
۲۵- $\frac{1}{11}-(\lambda+1)$	کی ساٹھویں رقم
۲۶- $\frac{1}{12}-(\lambda+1)$	ثابت کرو کہ لا کا سر (۱-۴) کی صورت تفصیلی

میں $\frac{1}{2}-(\lambda+1)$ ہے

۲۷- $\frac{1}{2}-(\lambda+1)$	کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو
-------------------------------	--

۲۸- $\frac{1}{3}-(\lambda+1)$	کی لا
-------------------------------	-------------

۲۹- $\frac{1}{4}-(\lambda+1)$	کی صورت تفصیلی میں پہلی منفی رقم کونسی ہے؟
-------------------------------	--

۳۰۔ (۱-۳) لا کی کتنی رقیں مثبت ہیں؟

۳۱۔ $\frac{1}{5+لا}$ کو لا کی قوار صعودی اور نزولی کے موافق پھیلاؤ

۲۰۱۔ (۱-لا) کی صورت تفصیلی میں پہلے $ن+۱$ سوں کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$(۱-لا) = ۳+۱+لا + \frac{۳ \times ۳}{۲ \times ۱} لا^۲ + \frac{۵ \times ۳}{۲ \times ۱} لا^۳ + \dots$$

$$+ \frac{(۱+ن)(۲+ن)}{۲ \times ۱} لا^۴ + \dots$$

$$(۱-لا) = ۱+لا+لا^۲+لا^۳+\dots+لا^۴+\dots$$

اب بائیں طرف کے دونوں سلسلوں کو اکٹھا ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کا سر

$$۳+۱ + \frac{۳ \times ۳}{۲ \times ۱} + \dots + \frac{(۱+ن)(۲+ن)}{۲ \times ۱} =$$

∴ مجموعہ مطلوبہ = لا کا سر (۱-لا) کی صورت تفصیلی میں

$$= \frac{(۱+ن)(۲+ن)(۳+ن)}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

۲۰۲۔ ظاہر ہے کہ مسئلہ ثنائی کی مدد سے ہم (لا+ما) ن کو ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں کیونکہ یہ جملہ ذیل کی صورتوں میں سے کسی ایک میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$لا^۴ (۱+\frac{۱}{لا})^۴ \text{ یا } ما^۴ (۱+\frac{۱}{ما})^۴$$

اور اگر لا < یا > ما تو ہم صورت اول یا دوم کو بالترتیب

استعمال کر سکتے ہیں -

۲۰۳ - (۱-لا) - ن کے پھیلاؤ میں رقم عامہ کی نہایت سادی صورت دریافت کرو -

$$(۱+د) دیں رقم = \frac{(ن)(۱-ن)(۱-ن-۲).....(ن-۱+د-۱-د-لا)}{۱}$$

$$= \frac{(۱-۱)ن(۱+ن)(۱+ن-۲).....(۱-۱+د-۱-د-لا)}{۱}$$

$$= \frac{(۱-۱)ن(۱+ن)(۱+ن-۲).....(۱-۱+د-۱-د-لا)}{۱}$$

$$= \frac{ن(۱+ن)(۱+ن-۲).....(۱+د-۱-د-لا)}{۱}$$

$$=$$

اس سے ظاہر ہے کہ (۱-لا) - ن کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم مثبت ہے -

اگرچہ کسی جملہ ثنائی کی رقم عامہ قاعدہ دفعہ ۲۰۰ کی مدد سے بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر عام استعمال میں بہتر ہوگا کہ ہمیشہ اُن تمام حالتوں میں رقم عامہ کی شکل مندرجہ بالا استعمال کیجائے جب قوت نامنفی ہو اور شکل

$$ن(۱-ن)(۱-ن-۲).....(ن-۱+د-۱-د-لا)$$

استعمال کی جائے جب قوت نامثبت ہو -

مثال - $\frac{۱}{۱۳-۱۳۳}$ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو

اگر قدر سے ر دیں رقم تعبیر کیجائے تو

$$ق_{19} = \frac{ن + د - ۱}{ر} \times لا \times ق \text{ تعداداً}$$

$$= \frac{د + ۱۹}{ر} \times \frac{۲}{۱۱} \times ق$$

$$\therefore ق_{19} < ق$$

$$\text{جب تک کہ } ۱ < \frac{(د + ۱۹) ۲}{ر ۳}$$

$$\text{یعنی } ۳۸ < ر$$

اسلئے ۳۸ تک ر کی تمام قیمتوں کے لئے $ق_{19} < ق$ لیکن اگر $ر = ۳۸$ تو $ق_{19} = ق$ اور یہی سب سے بڑی رقمیں ہیں پس ۳۸ دیں اور ۳۹ دیں رقمیں بلحاظ عددی قیمت کے آپس میں برابر ہیں اور باقی سب رقموں سے بڑی ہیں۔

تقریبات

۲۰۵۔ اگر عہ کوئی چھوٹی کسر واجب ہو تو عہ ۱ ایک چھوٹی کسر عہ کی ہوگی پس اگر عہ نہایت ہی قلیل ہو تو تقریبی حسابات میں عہ بمقابلہ عہ کے یا عہ بمقابلہ عہ کے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اگر معمولی تقرب مطلوب ہو تو ہم ایک سے اعلیٰ عہ کی سب قوتوں کو خارج کر سکتے ہیں اگر اس سے اچھا تقرب منظور ہو تو ایسی رقموں کو رکھ سکتے ہیں جن میں عہ شامل ہو اور اس سے اعلیٰ قوتوں کو خارج کر سکتے ہیں اور اسی طرح

اپنے نتائج کے مطلوبہ درجہ درست کے مطابق ہر حالت میں عمل کر سکتے ہیں۔

$$^2(ع+۱) = ۱ + ۲ع + ع^۲$$

∴ اگر $^2(ع+۱)$ کی تقریبی قیمت درکار ہو تو ہم اسے $۱ + ۲ع$ خیال کر سکتے ہیں۔

$$^3(ع+۱) = ۱ + ۳ع + ۳ع^۲ + ع^۳$$

اسلئے $۱ + ۳ع$ تقریبی قیمت $^3(ع+۱)$ کی خیال کی جاسکتی ہے اس سے اچھا تقریب $۱ + ۳ع + ۳ع^۲$ ہے

$$\text{اسی طرح سے } ^n(ع+۱) = ۱ + نع + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ع^۲ + \dots$$

$$= ۱ + نع \text{ (تخمیناً) جہاں } ع \text{ ایک چھوٹی کسر ہے}$$

نیز جب $ع$ اور $ن$ دو چھوٹی کسریں ہوں تو

$$^2(ع+۱) = (۱+ب)^۲ = (۱+م+ع)(۱+ن+ب) \text{ (تقریباً)}$$

$$= ۱ + م + ع + ن + ب \text{ (تقریباً)}$$

اگر حاصل ضرب $م + ن + ع + ب$ کو نظر انداز کر دیا جائے جو $ع$ اور $ب$

کے مقابلہ میں قلیل ہے

$$\text{مثال ۱۔ } (۱ + \frac{۳}{۲} لا) \frac{۱}{۲} (۱ - \frac{۲}{۲} لا) \text{ کی صورت تفصیلی میں پہلی}$$

تین رتبیں دریافت کرو۔

ان ثنائی جملوں کو ارقام (لا) تک پھیلاؤ تو حاصل ہوگا

$$(۱ + \frac{۳}{۲} لا - \frac{۹}{۸} لا^۲ - \dots)(۱ + \frac{۲}{۳} لا + \frac{۹}{۹} لا^۲ + \dots)$$

$$= 1 + 1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{9}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{13}{4} + \frac{55}{24} + \dots$$

اگر اس مثال میں $1 = 2 \dots$ یعنی $1 = 2 \dots$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ تیسری رقم ایک ایسی کسر اعشاریہ ہے جس میں حصہ اعشاریہ پانچ صفروں سے شروع ہوتا ہے اسلئے اگر جملہ معلومہ کی عددی قیمت پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک مطلوب ہو تو $1 + \frac{13}{4}$ میں لاکھ جگہ $2 \dots$ رکھنا اور جس رقم میں 1 شامل ہے اس کا نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

مثال ۲۔ اگر لا اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اعلیٰ قوتیں

نظر انداز کی جاسکیں تو $(1 + \frac{2}{3})^5 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}$ کی قیمت دریافت کرو

چونکہ بموجب شرائط سوال 1 اور اس سے اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں اسلئے ہر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں صرف پہلی دو رقمیں لینا کافی ہوگا۔

$$\text{پس جملہ} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right)^2 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{3} + 1 \right)^2}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \left(\frac{1}{3} + 1 \right) =$$

اپنے نتائج کے مطلوبہ درجہ درستی کے مطابق ہر حالت میں عمل کر سکتے ہیں۔

$$^2(ع+۱) = ۱ + ۲ع + ع^۲$$

∴ اگر $^2(ع+۱)$ کی تقریبی قیمت درکار ہو تو ہم اسے $۱ + ۲ع$ خیال کر سکتے ہیں۔

$$^3(ع+۱) = ۱ + ۳ع + ۳ع^۲ + ع^۳$$

اسلئے $۱ + ۳ع$ تقریبی قیمت $^3(ع+۱)$ کی خیال کی جاسکتی ہے اس سے اچھا تقرب $۱ + ۳ع + ۳ع^۲$ ہے

$$\text{اسی طرح سے } ^n(ع+۱) = ۱ + نع + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ع^۲ + \dots$$

$$= ۱ + نع \text{ (تخمیناً) جہاں } ع \text{ ایک چھوٹی کسر ہے}$$

نیز جب $ع$ اور $ب$ دو چھوٹی کسریں ہوں تو

$$^2(ع+ب) = ۱ + (ع+ب) = (۱+ع) + (۱+ب) \text{ (تقریباً)}$$

$$= ۱ + م + ن + ع + ب \text{ (تقریباً)}$$

اگر حاصل ضرب $م + ن + ع + ب$ کو نظر انداز کر دیا جائے جو $ع$ اور $ب$

کے مقابلہ میں قلیل ہے

$$\text{مثال ۱۔ } \frac{1}{4} (۱ + ۳ لا) - \frac{1}{2} (۱ + ۲ لا) \text{ کی صورت تفصیلی میں پہلی}$$

تین رقمیں دریافت کرو۔

ان ثنائی جملوں کو ارقام (لا) تک پھیلاؤ تو حاصل ہوگا

$$\left(۱ + \frac{۳}{۴} لا - \frac{۱}{۲} لا \right) \left(۱ + \frac{۲}{۳} لا + \frac{۱}{۴} لا + \dots \right)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) + 1 + \left(\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{13}{4} + 1 + \frac{55}{24}$$

اگر اس مثال میں $1 = 2 \dots$ یعنی $1 = 2 \dots$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ تیسری رقم ایک ایسی کسر اعشاریہ ہے جس میں حصہ اعشاریہ پانچ صفروں سے شروع ہوتا ہے اسلئے اگر جملہ معلومہ کی عددی قیمت پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک مطلوب ہو تو $1 + \frac{13}{4}$ میں لاکھ جگہ $2 \dots$ رکھنا اور جس رقم میں 1 شامل ہے اس کا نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

مثال ۲۔ اگر 1 اتنا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اعلیٰ قوتیں

نظر انداز کی جاسکیں تو $(1 + \frac{2}{3})^2 + (1 + \frac{2}{3})^3 + \dots$ کی قیمت دریافت کرو

چونکہ بموجب شرائط سوال 1 اور اس سے اعلیٰ قوتیں نظر انداز کی جاسکتی ہیں اسلئے ہر ایک جملہ ثنائی کی صورت تفصیلی میں صرف پہلی دو رقمیں لینا کافی ہوگا۔

$$\text{پس جملہ} = \frac{(1 + \frac{2}{3})^2 + (1 + \frac{2}{3})^3}{(1 + \frac{2}{3})^2}$$

$$= \frac{(1 + \frac{1}{3})^2 + (1 + \frac{1}{3})^3}{(1 + \frac{2}{3})^2}$$

$$= \frac{1}{8} (1 + \frac{14}{3}) (1 + \frac{3}{8})^2 =$$

$$\frac{1}{8} = (3 - \frac{1}{4}) (\frac{3}{8} - 1)$$

لا^۲ شامل ہوتا ہے۔
 $\frac{1}{8} = (3 - \frac{9}{16}) (\frac{9}{16} - 1)$ اگر اس رقم کو نظر انداز کیا جائے جیسے

مثال ۳۔ اگر لا بمقابلہ ایک کے چھوٹا ہو تو $\frac{\frac{1}{2}(7+5)}{\frac{1}{2}(3-1) + \frac{1}{2}(5-3)}$ کی تقریبی قیمت دریافت کرو

$$\begin{aligned} \text{جملہ} &= \frac{\frac{1}{2}(7+5) \times \frac{1}{2}(3+1)}{\frac{1}{2}(3-1) + \frac{1}{2}(5-3)} \\ &= \frac{2 \times 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{(7+5) \times 2}{(3-1) \times 2} = \frac{(3+1) \times 2}{5-3} =$$

$$= \frac{(7+5) \times 2}{(3-1) \times 2} = \frac{(3+1) \times 2}{5-3} =$$

$$= \frac{(3+1) \times 2}{5-3} =$$

مثال ۴۔ ایک شاقول کا طول ۱ فٹ ہے اور اس کے اہتزاز سکند ظاہر کرتے ہیں، اگر اس کے طول کو ایک فیصدی زیادہ کر دیا جائے تو معلوم کرو کہ ۲ گھنٹے میں شاقول کتنے اہتزاز کم ظاہر کریگا، اہتزاز کا وقت سکندوں میں $\pi \times \frac{1}{\sqrt{g}}$ طول کے بڑھ جانے کے بعد اگر شاقول کے ایک اہتزاز کا

وقت سکندوں میں ت ہو تو

$$ت = \pi \times \frac{1}{32} \times \frac{1}{100}$$

لیکن $\pi \times \frac{1}{32} = 1$ (کیونکہ اصلی شاقول کے ایک اہتزاز کا وقت ایک سکند ہے)

اسلئے تقسیم سے $t = \frac{1}{100} + 1$ اہتزازوں کی کل تعداد ۲۴ گھنٹے میں
 = سکندوں کی تعداد ۲۴ گھنٹے میں ÷ ایک اہتزاز کا وقت

$$\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100} + 1\right) \times 84000 = \frac{40 \times 40 \times 24}{\frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100} + 1\right)} =$$

$$= 84000 \left(\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} - 1\right) \text{ تخمیناً } = 84000 \left(\frac{1}{100} - 1\right) = 83200 - 84000$$

اصلی حالت میں شاقول کے اہتزاز ۸۴۰۰۰ تھے۔

اسلئے اہتزازات کی مطلوبہ تعداد جو ۲۴ گھنٹے میں شاقول نے

کم ظاہر کی = ۸۳۲۰۰

مثال ۵۔ $\frac{1}{24}$ کی قیمت چار مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{2} - 1\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (2 - 2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} + \dots$$

مختلف رقموں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یوں عمل کرنا چاہیئے

$$\begin{array}{r}
 ۱ \\
 ۵ \overline{) ۵۱۴۲۸۵۶} \dots\dots\dots = \frac{1}{2} \\
 ۵ \overline{) ۵۰۲۰۴۰۸} \\
 ۵ \overline{) ۵۰۰۲۹۱۵} \dots\dots\dots = \frac{1}{۳۲} \\
 ۵ \overline{) ۵۰۰۰۴۱۶} \\
 ۵ \dots\dots\dots ۵۹ \dots\dots\dots = \frac{1}{۵۲}
 \end{array}$$

اور ہم دیکھتے ہیں کہ رقم $\frac{5}{4} \times \frac{1}{2}$ ایسی کسر اعشاریہ ہے جو پانچ
صفروں سے شروع ہوتی ہے۔

$$۵۰۰۰۰۸۸ + ۵۰۰۲۹۱۵ + ۵۱۴۲۸۵۶ = \frac{1}{۴۴۸} \therefore$$

۵۱۴۵۸۶ = اور یہ نتیجہ کم از کم چار مرتبہ کے اعشاریہ
تک صحیح ہے۔

مثال ۶۔ ۱۲۶ کا جز الکعب پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک نکالو
 $\sqrt[5]{(1+5)} = \sqrt[5]{126}$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{۳۵} + 1\right)} ۵ =$$

$$\left(\dots\dots\dots - \frac{1}{۳۵} \times \frac{5}{۸۱} + \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۹} - \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۳} + 1 \right) ۵ =$$

$$\dots\dots\dots - \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۸۱} + \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۹} - \frac{1}{۳۵} \times \frac{1}{۳} + ۵ =$$

$$\dots\dots\dots - \frac{۴}{۳۱۰} \times \frac{1}{۸۱} + \frac{۵۲}{۳۱۰} \times \frac{1}{۹} - \frac{۷}{۳۱۰} \times \frac{1}{۳} + ۵ =$$

$$\dots\dots\dots - \frac{۵۰۰۰۱۲۸}{۸۱} + \frac{۵۰۰۰۳۲}{۹} - \frac{۵۰۴}{۳} + ۵ =$$

$$\dots\dots\dots + ۵۰۰۰۰۳۵ \dots\dots\dots - ۵۰۱۳۳۳۳ \dots\dots\dots + ۵ =$$

= ۵۶۰.۱۳۲۹ پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک -
 ۲۰۶ - تقریبی تقسیم ۵۶۵۸ کو ۹۹۷ پر تقسیم کرو
 $(۳-۱۰۰) \div ۵۶۵۸ = ۹۹۷ \div ۵۶۵۸$

$$1 - \left(\frac{۳}{۱۰۰} - ۱\right) ۵۶۵۸ = \left(\frac{۳}{۱۰۰} - ۱\right) ۱۰۰ \div ۵۶۵۸ =$$

$$\left(\frac{۳}{۱۰۰} \div ۵۶۵۸\right) + ۵۶۵۸ = تقریباً \left(\frac{۳}{۱۰۰} + ۱\right) \times ۵۶۵۸ =$$

$$۵۰۱۷..... + ۵۶۵۸ =$$

۵۶۷۷۵ = تین مرتبہ کے اعشاریہ تک

۲۰۷ - کسی عدد کے اردیں جذر کا تقریب
 اگر $\bar{n} = ۱ + ۱$ لا جہاں ۱ تقریبی قیمت ہے اور اس لئے
 لا ایک چھوٹی مقدار ہے تو اس سے اچھا تقریب ضابطہ ذیل
 سے حاصل ہوگا یعنی

$$\bar{n} = \frac{n(1+r) + 1(1-r)}{1(1+r) + n(1-r)} \times 1 \dots\dots\dots (۱)$$

تمثیلاً اگر جذر الکعب نکالنا مطلوب ہو تو

$$1 \times \frac{1^3 + n^3}{1^2 + n} = 1 \times \frac{1^3 + n^3}{1^2 + n} = \bar{n}$$

نہاں کی قیمت دریافت کرو

اس جگہ $\frac{۵}{۳}$ جذر الکعب کی تقریبی قیمت ہے۔

$$\therefore \bar{n} = \frac{19.5}{1512} = \frac{5}{3} \times \frac{\frac{125}{27} + 2 \times 2}{\frac{25}{9} + 2} = ۲\frac{۲}{۹}$$

اس تقرب سے تمام کی قیمت پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک بالکل صحیح حاصل ہوتی ہے
اگر ف - ق بمقابلہ ف یا ق کے نہایت چھوٹا ہو تو

$$\frac{ف}{ق} = \frac{(1+ف) + (1-ق)}{(1+ق) + (1-ف)} \text{ تقریباً}$$

$$\text{کیونکہ } \frac{ف}{ق} = \frac{\{ (ف+ق) + (ق-ف) \}}{\{ (ق+ف) - (ق-ف) \}}$$

$$= \frac{\left\{ \frac{ق-ف}{ق+ف} + 1 \right\}}{\left\{ \frac{ق-ف}{ق+ف} - 1 \right\}}$$

$$\text{تقریباً } \frac{\frac{1}{ق} \times \frac{(ق-ف)}{(ق+ف)} + 1}{\frac{1}{ق} \times \frac{ق-ف}{ق+ف} - 1} =$$

$$= \frac{(1+ف) + (1-ق)}{(1+ق) + (1-ف)}$$

اگر اس میں ف = ن اور ق = و تو اس کی صورت جبریہ صورت (۱) کے متماثل ہو جائے گی۔

امثلہ نمبر ۲۵

ذیل کی تفصیلی صورتوں میں (۱+ف) دیں رقم دریافت کرو۔

$$\begin{array}{llll}
 ۱- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۲- & (۷-۱) \\
 ۳- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۵- & ۳(۷+۱) \\
 ۷- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۸- & ۲(۷-۲) \\
 ۱۰- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۱۱- & \frac{1}{3}(۷-۱) \\
 & \frac{1}{3}(۷-۱) & ۱۲- & \frac{1}{3}(۷-۱)
 \end{array}$$

ذیل کے جملوں کی تفصیلی صورتیں بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

$$\begin{array}{ll}
 ۱۳- & \frac{1}{3}(۷+۱) \text{ جب } ۷ = \frac{1}{3} \\
 ۱۴- & \frac{1}{3}(۷+۱) \text{ جب } ۷ = \frac{1}{3} \\
 ۱۵- & \frac{1}{3}(۷-۱) \text{ جب } ۷ = \frac{1}{3} \\
 ۱۶- & \frac{1}{3}(۷+۱) \text{ جب } ۷ = ۸ \text{ اور } ۳ = ۱ \\
 ۱۷- & \frac{1}{3}(۷-۱) \text{ جب } ۷ = ۵ \\
 ۱۸- & \frac{1}{3}(۷+۱) \text{ جب } ۷ = ۹ \text{ اور } ۲ = ۱۵
 \end{array}$$

پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\begin{array}{llll}
 ۱۹- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۲۰- & \frac{1}{3}(۷-۱) \\
 ۲۱- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۲۲- & \frac{1}{3}(۷-۱) \\
 ۲۳- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۲۴- & \frac{1}{3}(۷-۱) \\
 ۲۵- & \frac{1}{3}(۷+۱) & ۲۶- & \frac{1}{3}(۷-۱)
 \end{array}$$

اگر لا آتا چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بڑی تو تیس نظر انداز کر دی جاسکیں تو جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

$$\begin{array}{ll}
 ۲۷- & \frac{1}{3}(۷+۱) \text{ جب } ۷ = ۱ \\
 ۲۸- & \frac{1}{3}(۷-۱) \text{ جب } ۷ = ۳
 \end{array}$$

-۲۹

$$\frac{\frac{2}{3}(13+1)}{\sqrt{15-2}\sqrt{13+2}}$$

-۳۰

$$\frac{\frac{1}{7}(13+2) \times \frac{1}{7}(13+1)}{\frac{2}{3}(13+2)}$$

-۳۱

$$\frac{\sqrt{15-\frac{5}{4}} + \sqrt{13-\frac{3}{8}}}{\sqrt{\frac{15}{4}-1} + \sqrt{13+1}}$$

-۳۲

$$\frac{\sqrt{13+8} - \sqrt{13-1}}{\frac{1}{7}(\frac{15}{4}+2) + \frac{2}{3}(13+1)}$$

-۳۳ ثابت کرو کہ $(1-13)^{\frac{1}{7}}$ کی صورت تفصیلی میں لا کا

$$\text{سر } \frac{1}{(1-13)^{\frac{1}{7}}}$$

-۳۴

ثابت کرو کہ $(1+1)^n$

$$= \{ 1 - \frac{1}{1+1} + \frac{(1+n)}{2 \times 1} \frac{(1-1)}{1+1} + \dots \}$$

-۳۵

کی صورت تفصیلی میں پہلی تین

رقمیں دریافت کرو۔

$$\frac{\frac{2}{3}(13+1) + \sqrt{15+1}}{(1-1)}$$

-۳۶

کی صورت تفصیلی میں

پہلی تین رقمیں دریافت کرو۔

-۳۷ ثابت کرو کہ $(1-1)^n$ کی صورت تفصیلی میں n واں سر

$(1-1)^n$ میں سر کا دوچند ہے۔

۲۰۸ - ن کی کسی ناطق قیمت کے لئے $(1 + \lambda)$ کی صورت

تفصیلی میں تعداداً بڑی سے بڑی رقم دریافت کرو۔

چونکہ ہمیں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے تعلق ہے اس لئے ہم λ کو ہمیشہ مثبت خیال کریں گے۔

صورت اول - فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

$(1 + \lambda)$ دیں رقم λ دیں رقم کو $\frac{(1 + \lambda) \times \lambda}{\lambda}$ سے یعنی $(1 + \lambda) - 1$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے اس سے ظاہر ہے کہ رقمیں یکے بعد دیگرے بڑھتی جاتی ہیں جب تک کہ

$$1 < \frac{(1 + \lambda) - 1}{\lambda}$$

$$\text{یعنی } 1 + \lambda < \frac{(1 + \lambda) \times \lambda}{\lambda}$$

$$\text{یا } \lambda < \frac{(1 + \lambda) \times \lambda}{1 + \lambda}$$

اب اگر $\frac{(1 + \lambda) \times \lambda}{1 + \lambda}$ صحیح عدد ہو تو اس کو ف سے تعبیر کرو،

تب اگر $\lambda = ف$ تو جز ضروری ایک کے برابر ہے اور $(1 + \lambda)$ دیں رقم ف دیں رقم کے ، اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(1 + \lambda) \times \lambda}{1 + \lambda}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے

تعبیر کرو اس صورت میں λ کی سب سے بڑی قیمت ق ہے

اور $(ق + 1)$ دیں رقم سب سے بڑی ہے۔

صورت دوم - فرض کرو کہ ن کسر مثبت ہے۔

موافق سابق $(1 + \lambda)$ دیں رقم λ دیں رقم کو $(1 + \lambda) - 1$ سے

مغرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۱) اب اگر لا ایک سے بڑا ہو تو ر کو کافی طور پر بڑھانے سے مندرجہ بالا جز مضربی (- لا) کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس طرح سے کسی خاص رقم کے بعد ہر ایک رقم بلحاظ عددی قیمت کے اپنی رقم ماقبل کی تقریباً لا لگنی ہو سکتی ہے پس معلوم ہوا کہ رقیں متواتر بڑھتی جاتی ہیں اور اس صورت میں کوئی رقم ایسی نہیں جو باقی سب رقموں سے بڑی ہو۔

(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ جز مضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے جب تک کہ ر کی قیمت $1 + ن$ سے بڑی نہیں ہو جاتی اور اس مقام سے اس کی قیمت منفی ہو جاتی ہے مگر تعداداً ہمیشہ ایک سے کم رہتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ اس صورت میں بڑی سے بڑی رقم صورت تفصیلی میں موجود ہے۔

موافق سابق جز مضربی ایک سے بڑا ہو گا جب تک کہ $\frac{(ن+۱)لا}{لا+۱}$ کے ر اگر $\frac{(ن+۱)لا}{لا+۱}$ صحیح عدد ہو تو اسے ف سے تعبیر کر دو تب موافق صورت اول (ن + ۱) دیں رقم ف دیں رقم کے برابر ہے اور یہی رقیں باقی رقموں سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{لا+۱}$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ تی اس کا صحیح حصہ ہے تب ظاہر ہے کہ (تی + ۱) دیں رقم سب سے بڑی ہے۔ صورت سوم۔ فرض کرو کہ ن منفی ہے۔

یعنی فرض کرو کہ $ن = - م$ جہاں م مثبت مقدار ہے اس صورت میں جز مضربی کی عددی قیمت $\frac{م-۱}{م} \times \frac{(م-۱)لا}{م}$ یعنی $(۱ + \frac{۱-لا}{م})$ لا ہوگی

(۱) اگر لا ایک سے بڑا ہو تو موافق بالا (صورت دوم) ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ صورت تفصیلی میں کوئی ایسی رقم نہیں جو باقی سب سے بڑی ہو۔

(۲) اگر لا ایک سے کم ہو تو جز منربی ایک سے بڑا ہوگا

$$\text{جب تک کہ } \left(\frac{1-m}{r} + 1 \right) لا < 1$$

$$\text{یعنی } \frac{(1-m) لا}{r} < 1 - لا$$

$$\text{یا } \frac{(1-m) لا}{لا - 1} < r$$

اگر $\frac{(1-m) لا}{لا - 1}$ مثبت صحیح عدد ہو تو اسے ف سے تعبیر کرو، تب (ف + ۱) دیں رقم ف دیں رقم کے برابر ہوگی اور یہی رقمیں باقی سب سے بڑی ہیں۔

اگر $\frac{(1-m) لا}{لا - 1}$ مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ ق اس کا صحیح حصہ ہے اس صورت میں (ق + ۱) دیں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر $\frac{(1-m) لا}{لا - 1}$ منفی ہو تو م ایک سے کم ہوگا اور جز منربی کو بصورت (۱ - $\frac{1-m}{r}$) لا لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ہمیشہ ایک سے کم رہے گا، اس لئے ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے کم ہوگی۔ پس معلوم ہوا کہ اس صورت میں پہلی رقم سب سے بڑی ہے۔

۲۰۹۔ ن حروف 'ا'، 'ب'، 'ج' اور ان کی مختلف قوتوں سے جو ابعاد کے متجانس حاصل ضرب بن سکیں ان کی تعداد دریافت کرو۔

حل تقسیم سے یا مسئلہ ثنائی سے -

$$\frac{1}{1-ا} = 1 + ا + ا^2 + ا^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-ب} = 1 + ب + ب^2 + ب^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-ج} = 1 + ج + ج^2 + ج^3 + \dots$$

ضرب دینے سے

$$\frac{1}{1-ا} \times \frac{1}{1-ب} \times \frac{1}{1-ج} \times \dots$$

$$= (1 + ا + ا^2 + ا^3 + \dots) (1 + ب + ب^2 + ب^3 + \dots) (1 + ج + ج^2 + ج^3 + \dots) \dots$$

$$= 1 + (ا + ب + ج) + (ا^2 + ب^2 + ج^2 + ا + ب + ج) + \dots$$

$$= 1 + ص_1 + ص_2 + ص_3 + \dots \text{ (فرض کرو)}$$

جہاں 'ص'، 'ص'، 'ص' 'ایک'، 'دو'، 'تین' ابعاد

کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعے ہیں جو حروف 'ا'، 'ب'، 'ج' اور ان کی قوتوں کو لینے سے بنتے ہیں۔

ان حاصل ضربوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے ہر ایک حرف کو ایک کے برابر رکھو، اس طرح کرنے سے 'ص'، 'ص'، 'ص' میں ہر ایک رقم ایک کے برابر ہو جاتی ہے اس لئے 'ص'، 'ص'، 'ص' کی جو قیمتیں اس طرح

سے حاصل ہوتی ہیں وہ ایک، دو، تین، ابعاد کی متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$\text{نیز } 1-1 \times 1-1 \times 1-1 \times \dots \times 1-1$$

$$\text{بن جائیگا } \frac{1}{(1-1)^n} \text{ یا } (1-1)^{-n}$$

اسلئے ص = $(1-1)^{-n}$ کی صورت تفصیلی میں لا کا سر

$$= \frac{n(1+n)(1+n) \dots (1+n)}{1}$$

$$= \frac{n+1}{1-n}$$

۲۱۰۔ کسی جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی میں تعداد ارقام دریافت کرو، جب قوت نما مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱ + ۱ + ۱ + + ۱) کی صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم کے ابعاد n ہیں اس لئے رتوں کی تعداد n ابعاد کے ایسے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد کے برابر ہے جو رتقاویر ۱، ۱، ۱، ۱ اور ان کی مختلف قوتوں کو اکٹھا لینے سے

بنتے ہیں اسلئے دفعہ گزشتہ کی مدد سے تعداد مطلوبہ $\frac{n+1}{1-n}$ ہے

۲۱۱۔ نتیجہ دفعہ ۲۰۹ سے ہم n اشیا کے اجتماعوں کی تعداد کے متعلق ایک مسئلہ مستنبط کر سکتے ہیں۔

مربوب دینے اور مختلف حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اس لئے

$$\text{مربوب} = \text{فر} - \text{فر} + \text{فر} + \text{فر} - \text{فر}$$

لیکن فر = $\frac{(1-r)(1+r)}{2}$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰)

اس لئے مربوب

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-r)(1+r)}{2} - \frac{(1-r)(1+r)}{2} + \frac{(1-r)(1+r)}{2} - \frac{(1-r)(1+r)}{2} + \frac{(1-r)(1+r)}{2} \\ &= \left[\frac{(1-r)(1+r)}{2} + \frac{(1-r)(1+r)}{2} + \frac{(1-r)(1+r)}{2} + \frac{(1-r)(1+r)}{2} + \frac{(1-r)(1+r)}{2} \right] \\ &= \frac{(1-r)(1+r)}{2} (4) \\ &= \frac{(1-r)(1+r)}{2} (4) \end{aligned}$$

مثال ۲۔ سلسلہ ذیل کی قیمت دریافت کرو۔

$$\begin{aligned} &+ \frac{9 \times 4 \times 5}{3 \times 3 \times 3} + \frac{4 \times 5}{3 \times 3} + \frac{5}{3 \times 2} + 2 \\ &+ \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + 2 = \text{جواب} \\ &+ \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + 2 = \\ &+ \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + 2 = \\ &+ \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + 2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + 2 = \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 3}{2} + 2 = \end{aligned}$$

مثال ۳۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ (۳ + ۱) = ۲

تو $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$ کی قیمت دریافت کرو
 (۱) $(1 - 1) = 0 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$
 نیز (۱) $(1 - 1) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$
 اب اگر مساوات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کے سلسلوں کو
 اکٹھی ضرب دیدی جائے تو حاصل ضرب میں 1 کا سر ہوگا
 $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$
 پس معلوم ہوا کہ یہ جملہ
 $= 1$ کا سر حاصل ضرب $(1 - 1) = 0$ میں
 $= 1$ کا سر $(1 - 1) = 0$ میں
 $= \frac{(1 + n)(1 + n) - (1 + n)}{(1 + n)}$

امثلہ نمبری ۲۶

سر دریافت کرو

- ۱- $\frac{5 - 3}{2(1 - 1)}$ کی صورت تفصیلی میں 1 کا
- ۲- $\frac{2 - 1 + 1}{3(1 + 1)}$ کی صورت تفصیلی میں 1 کا
- ۳- $\frac{2 - 1 + 1}{2(1 + 1)}$ کی صورت تفصیلی میں 1 کا
- ۴- $\frac{2 + 1 + 1}{3(1 + 1)}$ کی صورت تفصیلی میں 1 کا
- ۵- ثابت کرو کہ

$$P_1 = -\frac{1}{12} \times \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{24} \times \frac{5 \times 3 \times 1}{4 \times 3 \times 2} - \frac{1}{24} \times \frac{3 \times 1}{3 \times 2} + \frac{1}{24} \times \frac{1}{2} - 1$$

ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{4 \times 5 \times 3}{12 \times 8 \times 4} + \frac{5 \times 3}{8 \times 4} + \frac{3}{4} + 1 = 8$$

ثابت کرو کہ

$$\dots + \frac{(2+n)(2+n)n}{4 \times 4 \times 3} + \frac{(2+n)n}{4 \times 3} + \frac{n}{3} + 1$$

$$\left\{ \dots + \frac{(2+n)(1+n)n}{4 \times 4 \times 3} + \frac{(1+n)n}{4 \times 3} + \frac{n}{3} + 1 \right\}^2 =$$

ثابت کرو کہ

$$\left\{ \dots + \frac{(2-n)(1-n)n}{21 \times 13 \times 4} + \frac{(1-n)n}{13 \times 4} + \frac{n}{4} + 1 \right\}^2$$

$$\left\{ \dots + \frac{(2+n)(1+n)n}{4 \times 4 \times 2} + \frac{(1+n)n}{4 \times 2} + \frac{n}{2} + 1 \right\}^3 =$$

ثابت کرو کہ جب لانا ہیئت چھوٹا ہو تو

$$\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{14} + 1 \right) 2 - 1 = \frac{3 \times 4}{254} \text{ (تقریباً)}$$

ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(5 + 2n)^n$

صحیح حصہ طاق ہوگا
ثابت کرو کہ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $(8 + 3n)^n$

صحیح حصہ طاق ہوگا۔

$$(1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^n n) \text{ کی صورت}$$

باب چہارم

مسئلہ کثیر الارقام

۲۱۳۔ اس سے پہلے ہم نے دفعہ ۱۸۸ میں دیکھا ہے کہ مسئلہ ثنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام کی صورت تفصیلی حاصل ہو سکتی ہے، اس باب میں ہمارا مقصد جملہ کثیر الارقام کی مکمل صورت تفصیلی حاصل کرنے کا اتنا نہیں ہے جتنا کہ کسی رقم معینہ کے سر دریافت کرنے کا۔

مثال - جملہ (ا + ب + ج + د) کی صورت تفصیلی میں
ا^۲ ب^۲ ج^۲ ڈ^۲ کا سر دریافت کرو

مطلوبہ صورت تفصیلی ۱۴ اجزاء ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جز ضربی (ا + ب + ج + د) ہے، نیز صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم کی قوتوں کا مجموعہ ۱۴ ہے کیونکہ یہ ۱۴ اجزاء ضربی میں سے ہر ایک جز ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے پس رقم ا^۲ ب^۲ ج^۲ ڈ^۲ کو مرتب کرنے کے لئے ہمیں ا کو چودہ اجزاء ضربی میں سے کسی چار اجزاء ضربی سے، ب کو باقی ماندہ دس اجزاء ضربی میں سے کسی دو اجزاء ضربی سے، اور ج کو

باقی ماندہ آٹھ اجزاء ضربی میں سے کسی تین اجزاء ضربی سے لینا چاہیئے لیکن ایسا کرنے کے کل طریقوں کی تعداد صرف ۱۴۱ ایسے حروف کو باہم ترتیب دینے کی تعداد کے برابر ہے جن میں سے چار تو 'ا' ہیں، دو 'ب'، تین 'ج' اور پانچ 'د' یعنی

$$\frac{141}{5 \times 3 \times 2 \times 1} = \text{[دفعہ ۱۶۵]}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ کل اتنی دفعہ رقم 'ا' 'ب' 'ج' 'د' آخری حاصل ضرب میں شامل ہوتی ہے اس لئے سر مطلوب = ۲۵۲۲۵۲۰ =

۲۱۴ - (۱ + ب + ج + د +) کی صورت تفصیلی میں کسی رقم معینہ کا سر دریافت کر دے اس میں 'ع' مثبت صحیح عدد ہے مطلوبہ صورت تفصیلی ایسے 'ع' اجزاء ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے ہر ایک جز ضربی 'ا' + 'ب' + 'ج' + 'د' + کے برابر ہے اب چونکہ صورت تفصیلی میں ہر ایک رقم ان 'ع' اجزاء ضربی میں سے ہر ایک جز ضربی سے ایک ایک حرف لینے سے بنتی ہے اس لئے آخری حاصل ضرب میں کسی رقم 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کے شامل ہونے کے کل طریقوں کی تعداد ایسے 'ع' حروف کو مختلف اسلوبوں سے ترتیب دینے کی تعداد کے برابر ہے جن میں ضربی ہے کہ 'ا' کی تعداد 'ع' ہو، 'ب' کی تعداد 'ب' اور 'ج' کی تعداد

جہ اور علیٰ ہذا القیاس - یعنی

'ا' 'ب' 'ج' 'د' کا سر ہے

$$\frac{1}{1 \times 1 \times 1 \times 1} = \text{[دفعہ ۱۶۵]}$$

فرض کرو کہ جہ = ۰ تو بہ = ۵ اور عہ = ۴

سر مطلوب جملہ (۱) کی مطابق قیمتوں کا مجموعہ ہوگا

$$\text{اسلئے مطلوب} = \frac{۱}{۲} \text{ب ج} + \frac{۱}{۳} \text{ب ج} + \frac{۱}{۴} \text{ب ج} + \frac{۱}{۵} \text{ب ج}$$

$$= ۲۵۲ \text{ب ج} + ۵۰۴ \text{ب ج} + ۱۲۶ \text{ب ج}$$

۲۱۵۔ (۱+ب لا+ج لا+د لا+.....) کی صورت

تفصیلی میں رقم عامہ دریافت کرو جہاں ن کوئی مقدار ناطق ہے
مسئلہ ثانی کی مدد سے رقم عامہ ہے

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲).....(ن-ع+۱)}{ع} \text{ اور } (ب لا+ج لا+د لا+.....) ع$$

جہاں ع مثبت صحیح عدد ہے

نیز بموجب دفعہ گزشتہ (ب لا+ج لا+د لا+.....) کی صورت
تفصیلی میں رقم عامہ ہے۔

$$\frac{ب ج د لہ لا بہ ۲ جہ ۳ لہ +}{ب ج لہ}$$

جہاں بہ جہ لہ ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن کا مجموعہ
ع ہے۔

پس جملہ مجوزہ کی صورت تفصیلی میں رقم عامہ ہوئی

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲).....(ن-ع+۱)}{ب ج لہ} \text{ اور } (ب ج د لہ لا بہ ۲ جہ ۳ لہ +)$$

جہاں بہ جہ لہ ع =

۲۱۶۔ چونکہ (۱+ب+لا+ج+لا+.....) صورت

ذیل میں بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(۱+ب+لا+ج+لا+.....) = (۱+ب+لا+ج+لا+.....)$$

اسلئے صرف اسی صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جس میں جملہ کثیر الارقام کی پہلی رقم ایک ہو۔

پس (۱+ب+لا+ج+لا+.....) کی رقم عامہ ہے

$$\frac{(۱-ن)(۱-ن)(۲-ن).....(۱۰-ن)(۱۰-ن)}{(۱-ن)(۱-ن)(۲-ن).....(۱۰-ن)(۱۰-ن)} = (۱+ب+لا+ج+لا+.....)$$

جہاں بہ+جہ+لا+.....=ع
مثال۔ (۱-۱)(۱-۱)(۲-۱).....(۱۰-۱)(۱۰-۱) کی صورت تفصیلی میں لا کا سر دریافت کرو

اس جملے کی رقم عامہ ہے

$$\frac{(۱-۱)(۱-۱)(۲-۱).....(۱۰-۱)(۱۰-۱)}{(۱-۱)(۱-۱)(۲-۱).....(۱۰-۱)(۱۰-۱)} = (۱+ب+لا+ج+لا+.....)$$

ہمیں قاعدہ آزمائش سے بہ+جہ+لا کی تمام مثبت صحیح قیمتیں دریافت کرنی ہیں جو شرائط مساوات بہ+جہ+لا=۳ کو پورا کریں اس کے بعد ع مساوات ع=بہ+جہ+لا سے معلوم ہو سکتا ہے، سر مطلوب جملہ (۱) کی مطابق قیمتوں کا مجموعہ ہوگا۔ بہ+جہ+لا..... کی قیمتیں دریافت کرنے کے لئے بہتر ہوگا کہ لا کی بڑی سے بڑی جائز قیمت سے شروع ہو کر اس کو تمام

صحیح قیمتیں علی التواتر دی جائیں صورت زیر بحث میں قیمتیں مفصلہ ذیل ہیں -

$$ل = ۱ ، ج = ۰ ، ب = ۰ ، ع = ۱$$

$$ل = ۰ ، ج = ۱ ، ب = ۱ ، ع = ۲$$

$$ل = ۰ ، ج = ۰ ، ب = ۳ ، ع = ۳$$

ان قیمتوں کو (۱) میں رکھنے سے سر مطلوب

$$= \left(\frac{۲}{۳} \right) (۱) + \left(\frac{۲}{۳} \right) (۰) + \left(\frac{۱}{۳} \right) (۳) + \left(\frac{۱}{۳} \right) (۳) =$$

$$= \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} - ۲ =$$

۲۱۷ - بعض اوقات مسئلہ ثنائی کی مدد سے جملہ کثیر الارقام

کا پھیلاؤ زیادہ آسانی اور سرعت سے حاصل ہو سکتا ہے -

مثال - (۱-۲ لا ۳ لا) کی صورت تفصیلی میں لا کا سر

دریافت کرو

اگر (۱-۲ لا ۳ لا) کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا دیا جائے تو

سر مطلوب پھیلاؤ کی پہلی چند رقموں سے لا کا سر منتخب کرنے سے

حاصل ہوگا ، پہلی چند رقمیں یہ ہیں -

$$۱ + ۳ (۲ لا ۳ لا) + ۲ (۲ لا ۳ لا) + ۱۰ (۲ لا ۳ لا) + ۱۵ (۲ لا ۳ لا) +$$

اس جملہ کو صرف پانچویں رقم تک پھیلا نا کافی ہے کیونکہ اس کے بعد

کی رقموں میں لا سے اعلیٰ قوتیں شامل ہیں -

$$سر مطلوب = ۹ \times ۶ + ۱۰ \times ۳ (۲) + (۳) ۱۵ + (۲) ۲$$

$$= ۶۶ -$$

باب پانزدہم

لوکارتم

۲۱۸۔ تعریف کسی عدد کا لوکارتم اساس معلوم پر، وہ قوت نما ہے جس کے موافق ضرور ہے کہ اساس کا صعود لیں تاکہ حاصل عدد معلوم کے برابر ہو جائے پس اگر $\lambda = n$ تو لا کو لوکارتم n کا اساس λ پر کہتے ہیں۔

مثال۔ (۱) چونکہ $3^2 = 81$ اسلئے ۸۱ کا لوکارتم اساس ۳ پر ہم ہے (۲) چونکہ $10 = 10^1$ ، $100 = 10^2$ ، $1000 = 10^3$ وغیرہ

اسلئے معلوم ہوا کہ اعداد ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، کے لوکارتم اساس ۱۰ پر بالترتیب طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ہیں

۲۱۹۔ n کا لوکارتم اساس λ پر بالعموم اس طرح لکھا جاتا ہے لوکہ n ، پس دونوں مساواتیں $\lambda = n$ (۱) اور $\lambda = \text{لوکہ } n$ (۲)

ایک ہی ربط کو ظاہر کرتی ہیں ان معادلات سے مساوات متماثلہ $n = \text{لوکہ } n$ حاصل ہوتی ہے اور یہ بعض اوقات کام

آتی ہے۔

لوک ۱ = ۱۰	اسلئے بوجب تعریف	۱۰ = ۱۰
لوک ۲ = ۱۰۰	" " "	۱۰ = ۱۰۰
لوک ۳ = ۱۰۰۰	" " "	۱۰ = ۱۰۰۰
لوک ۳ = ۱۰۰۰	" " "	۱۰ = $\frac{1}{1000} = 0.001$
لوک ۳ = ۱۲۵	" " "	۲۵ = ۱۲۵
لوک ۲ = $(\frac{1}{14})$	" " "	۲ = $\frac{1}{14}$

مثال - ۳۲^{۱۸} کا لوکارتم اساس ۲۸۲ پر دریافت کرو۔
فرض کرو کہ لا لوکارتم ہے تب

$$۳۲ \times ۳۲ = (۲۸۲) \text{ بوجب تعریف}$$

$$\frac{۳۲}{۵} \times \frac{۳۲}{۵} = (\frac{۱}{۲} \times ۲) \therefore$$

$$\frac{۳۲}{۵} + ۰ = \frac{۳۲}{۵} \therefore$$

اسلئے قوت نماؤں کو مادی رکھنے سے

$$\frac{۳۲}{۵} = لا \frac{۳۲}{۵} \therefore لا \frac{۱۸}{۵} = ۳۶$$

۲۲۰۔ جب یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص نظام لوکارتمی استعمال

میں ہے تو حرف آخر کو جس سے اساس تعبیر ہوتا ہے حذف

کر دیتے ہیں۔ پس عملی حسابات میں جہاں اساس ہمیشہ دس

ہوتا ہے اکثر لوک ۲، لوک ۳، کی بجائے اختصاراً

لوک ۲، لوک ۳، لکھتے ہیں

لوکارتم کا اساس کوئی عدد ہو سکتا ہے اور اس اساس کے مطابق تمام اعداد کے لوکارتموں کی جدولیں مرتب ہو سکتی ہیں۔ لیکن پیشتر اس کے کہ ہم مردج لوکارتمی جدولوں پر بحث کریں ہم چند ایسے مساکی عامہ ثابت کریں گے جو تمام لوکارتموں کے لئے صادق آتے ہیں خواہ اساس کچھ ہی ہو۔

۲۲۱۔ ایک کا لوکارتم صفر ہے

۱ کی تمام قیمتوں کے لئے $1 = 1$

لوک $1 = 0$ ۔ خواہ اساس کچھ ہی ہو

اساس کا اپنا لوکارتم ایک ہے

چونکہ $1 = 1$ اس لئے لوک $1 = 1$

اساس کی کسی قوت (مثلاً 1^2) کا لوکارتم 1 ہے اور اساس کے

شکافی کا لوکارتم 1 ہے۔

$\infty +$ کا لوکارتم $\infty +$ ہے اور صفر کا لوکارتم $\infty -$ ہے،

یہ بھی ظاہر ہے کہ منفی عدد کا لوکارتم ہمارے موجودہ مفہوم کے مطابق مقدار حقیقی نہیں ہو سکتا۔

۲۲۲۔ ایک حاصل ضرب کا لوکارتم دریافت کرو۔

فرض کرو کہ m حاصل ضرب ہے اور n نظام مجوزہ کا اساس ہے اور فرض کرو کہ

$1 = \text{لوک } m$ ، $1 = \text{لوک } n$

پس $1 = m$ اور $1 = n$

پس حاصل ضرب $m \times n = 1 = 1$

جس سے بموجب تعریف $\text{لوک} \text{ م ن} = \text{لا} + \text{ما} = \text{لوک} \text{ م} + \text{لوک} \text{ ن}$
 اسی طرح سے $\text{لوک} \text{ م ن ت} = \text{لوک} \text{ م} + \text{لوک} \text{ ن} + \text{لوک} \text{ ت}$
 اور علیٰ ہذا القیاس اجزاء ضربی کی کسی تعداد کے لئے
 مثال - $\text{لوک} \text{ م} = ۴۲ = \text{لوک} (۲ \times ۳ \times ۷)$

$$= \text{لوک} ۲ + \text{لوک} ۳ + \text{لوک} ۷$$

۲۲۳ - ایک کسر کا لوکارتم دریافت کرو
 اگر $\frac{۱}{۱۱}$ کسر مجوزہ ہو - تو فرض کرو کہ
 $\text{لا} = \text{لوک} \text{ م}$ اور $\text{ما} = \text{لوک} \text{ ن}$

$$\text{پس } ۱ = \text{م} \text{ اور } ۱۱ = \text{ن}$$

$$\text{اور کسر ہے } \frac{۱}{۱۱} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{۱}{۱۱}$$

جس سے بموجب تعریف $\text{لوک} \text{ م ن} = \text{لا} - \text{ما} = \text{لوک} \text{ م} - \text{لوک} \text{ ن}$
 مثال - $\text{لوک} (۱\frac{۲}{۱۱}) = \text{لوک} \frac{۱۳}{۱۱}$

$$= \text{لوک} ۱۳ - \text{لوک} ۱۱$$

$$= \text{لوک} (۲ \times ۳ \times ۷) - \text{لوک} ۱۱$$

$$= \text{لوک} ۲ + \text{لوک} ۳ + \text{لوک} ۷ - \text{لوک} ۱۱$$

۲۲۴ - ایک ایسے عدد کا لوکارتم دریافت کرو جو کسی قوت پر
 اٹھایا گیا ہو خواہ یہ قوت صحیح ہو یا مکسور -

اگر $\text{لوک} (م ت)$ مطلوب ہو تو فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{لوک} \text{ م} \text{ پس } ۱ = \text{م}$$

$$\text{تب } م ت = (۱ ت) = ۱ ت$$

جس سے بموجب تعریف $\text{لوک} (م ت) = ت لا$

یعنی لوکارتم (م ت) = ت لوکارتم
اسی طرح سے لوکارتم (م ت) = ت لوکارتم

مثال ۱- لوکارتم $\frac{540}{539} =$ لوکارتم $\frac{5 \times 3 \times 2}{11 \times 2}$

$2 = 2$ لوکارتم $3 + 2$ لوکارتم $3 + 3$ لوکارتم $5 + 2$ لوکارتم 6 لوکارتم 11

مثال ۲- لوکارتم $\frac{294}{216} =$ لوکارتم $\frac{2}{2 \times 3}$

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ لوکارتم $6 - \frac{1}{2}$ لوکارتم $3 - \frac{1}{2}$ لوکارتم 6

$\frac{11}{21} = \frac{11}{21}$ لوکارتم $6 - \frac{1}{2}$ لوکارتم 3

۲۲۵- نتائج مندرجہ بالا سے ظاہر ہے کہ

(۱) کسی حاصل ضرب کا لوکارتم اُس کے اجزاء ضربی کے لوکارتموں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

(۲) کسی کسر کا لوکارتم اُس حاصل تفریق کے برابر ہوتا ہے جو شمار کنندہ کے لوکارتم میں سے منب نما کے لوکارتم کو منفی کرنے سے حاصل ہو۔

(۳) کسی عدد کی ت میں قوت کا لوکارتم اُس عدد کے ت گنے لوکارتم کے برابر ہوتا ہے۔

(۴) کسی عدد کے درمیان جذر کا لوکارتم اُس عدد کے لوکارتم کے $\frac{1}{2}$ میں حصے کے برابر ہوتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ لوکارتموں کے استعمال سے اعمال ضرب، تقسیم، بالترتیب اعمال جمع، تفریق میں اور صعود، نزول

بالترتیب اعمال ضرب، تقسیم میں تبدیل ہو جاتے ہیں۔

مثال ۱۔ لوک $\frac{۳۲۱۸ \times ۳}{۱۸۱۲ \times ۴۰}$ کو مختصر کرو۔

جملہ = لوک (۳۲۱×۳) - لوک (۱۸×۴۰)

$$= \text{لوک } ۳ + \text{لوک } (۳۲۱) - \left\{ \text{لوک } ۴۰ + \text{لوک } (۱۸) \right\}$$

$$= \text{لوک } ۳ + \frac{۱}{۴} \text{ لوک } ۳۲ - \text{لوک } ۴۰ - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } ۱۸$$

$$= \text{لوک } ۳ + \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۲) - \text{لوک } (۵ \times ۲) - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۲ \times ۳)$$

$$= \text{لوک } ۳ + \frac{۵}{۴} \text{ لوک } ۲ - (\text{لوک } ۳ + ۵ \text{ لوک } ۲) - \frac{۱}{۳} (\text{لوک } ۲ + ۲ \text{ لوک } ۳)$$

$$= (-\frac{۲}{۳}) \text{ لوک } ۳ + (\frac{۵}{۴} - ۳ - \frac{۵}{۳}) \text{ لوک } ۲ - \text{لوک } ۵$$

$$= \frac{۱}{۳} \text{ لوک } ۳ - \frac{۵}{۴} \text{ لوک } ۲ - \text{لوک } ۵$$

مثال ۲۔ لوک $\frac{۳۱۱۸}{\text{ج}^۵ \text{ب}^۲}$ کو لوک 'ا'، لوک 'ب'، لوک 'ج'،

کی رقموں میں بیان کرو۔

$$\text{لوک } \frac{۳۱۱۸}{\text{ج}^۵ \text{ب}^۲} = \text{لوک } \frac{۳}{\text{ج}^۵ \text{ب}^۲}$$

$$= \text{لوک } ۳ - \text{لوک } (\text{ج}^۵ \text{ب}^۲)$$

$$= \frac{۳}{۴} \text{ لوک } ۱ - (\text{لوک } ۵ \text{ ج} + \text{لوک } ۲ \text{ ب})$$

$$= \frac{۳}{۴} \text{ لوک } ۱ - ۵ \text{ لوک ج} - ۲ \text{ لوک ب}$$

مثال ۳۔ مساوات $۱۰۷۳ = ۲۰۰ ج - ۱۰۷۳$ سے ۱۰۷۳ کی قیمت دریافت کرو

طرفین کے لوکار تم لینے سے حاصل ہوگا

$$لا \text{ لوک } ۱ - ۲ لا \text{ لوک } ج = (۱ + ۲ لا) \text{ لوک } ب$$

$$\therefore لا \text{ (لوک } ۱ - ۲ \text{ لوک } ج - ۳ \text{ لوک } ب) = \text{لوک } ب$$

$$\therefore لا = \frac{\text{لوک } ب}{\text{لوک } ۱ - ۲ \text{ لوک } ج - ۳ \text{ لوک } ب}$$

امثلہ نمبری ۲۸

لوکار تم دریافت کرو

- ۱۔ ۱۶ کا اساس ۲۸ پر اور ۱۷۲۸ کا اساس ۳۸۲ پر
- ۲۔ ۱۲۵ کا " ۵۸۵ " ۵۲۵ کا " ۳ " "
- ۳۔ $\frac{۱}{۲۵۶}$ کا " ۲۸۲ " ۳۵ کا " ۹ " "
- ۴۔ ۶۴۲۵ کا " ۲ " ۱۰۰۰ کا " ۶۰۱ " "
- ۵۔ ۱۰۰۰۰ کا " ۶۰۱ " ۱۰۰ کا " ۳۸۹ " "
- ۶۔ ۳۸۹ ، $\frac{۱}{۶۰۱}$ ، $\frac{۱۰۰}{۳۸۹}$ کا " ۱ " "

۷۔ ذیل کے لوکار تموں کی قیمتیں دریافت کرو

$$\text{لوک } ۱۲۸ ، \text{لوک } \frac{۱}{۲۱۶} ، \text{لوک } \frac{۱}{۸۱} ، \text{لوک } ۳۳۳ ، ۳۹$$

ذیل کے سات لوکار تموں کو 'لوک ۱' ، 'لوک ۲' ، 'لوک ۳' کی

رقوم میں بیان کرو۔

$$۸ - \text{لوک } (\overline{ماوا}^۱ب) - ۹ - \text{لوک } (\overline{ماوا}^۲ب)$$

$$۱۰ - \text{لوک } (\overline{ماوا}^۳ب) - ۱۱ - \text{لوک } (\overline{ماوا}^۴ب \times \overline{ماوا}^۵ب)$$

$$۱۲ - \text{لوک } (\overline{ماوا}^۳ب \div \overline{ماوا}^۴ب)$$

$$۱۳ - \text{لوک } \frac{\overline{ماوا}^۲ب \times \overline{ماوا}^۳ب}{\overline{ماوا}^۴ب}$$

$$۱۴ - \text{لوک } \left\{ \left(\frac{\overline{ماوا}^۲ب}{\overline{ماوا}^۳ب} \right) \div \left(\frac{\overline{ماوا}^۳ب}{\overline{ماوا}^۴ب} \right) \right\}$$

$$۱۵ - \text{ثابت کرو کہ لوک } \frac{\overline{ماوا}^۲ب \times \overline{ماوا}^۳ب}{\overline{ماوا}^۴ب} = \frac{\overline{ماوا}^۲ب \times \overline{ماوا}^۳ب}{\overline{ماوا}^۴ب}$$

$$= \frac{۱}{۳} \text{ لوک } ۵ - \frac{۲}{۵} \text{ لوک } ۲ - \frac{۲}{۳} \text{ لوک } ۳$$

$$۱۶ - \text{لوک } \overline{ماوا}^۳ب \times \overline{ماوا}^۴ب \times \overline{ماوا}^۵ب \text{ کو مختصر کرو}$$

$$۱۷ - \text{ثابت کرو کہ لوک } \frac{۵}{۳} - ۲ \text{ لوک } \frac{۵}{۹} + \text{لوک } \frac{۳۳}{۳۳} = \text{لوک } ۲$$

سعادلات ذیل کو حل کرو

$$۱۸ - \overline{ماوا}^۴ب = \overline{ماوا}^۵ب \quad ۱۹ - \overline{ماوا}^۳ب \times \overline{ماوا}^۴ب = \overline{ماوا}^۵ب$$

$$۲۰ - \overline{ماوا}^۴ب = \overline{ماوا}^۵ب \quad ۲۱ - \left\{ \overline{ماوا}^۴ب \times \overline{ماوا}^۵ب = \overline{ماوا}^۶ب \right\}$$

$$۲۲ - \text{اگر لوک } (\overline{ماوا}^۳ب) = ۱ \text{ اور لوک } \left(\frac{۱}{۲} \right) = \text{ب تو لوک } ۱$$

اور لوک ماکی قیمتیں دریافت کرو

$$۲۴ - \text{اگر } ۱۰^{-۳} \times \text{ب}^۵ = ۱۰^{+۵} \times \text{ب}^۲ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لا لوک } \left(\frac{\text{ب}}{۱}\right) = \text{لوک } ۱$$

۲۴ - مساوات ذیل کو حل کرو

$$(۱ - ۲ \times ۱۰^{-۲} \text{ب} + ۲ \times ۱۰^{-۵} \text{ب}^۲) = (۱ - \text{ب})^۲ (۱ + \text{ب})^۲$$

مروج لوکارتموں کا بیان

۲۴۶ - اساس ۱۰ کے موافق جو لوکارتم ہوں ان کو مروج یا عشری لوکارتم کہتے ہیں۔ اس نظام کو ~~اسات~~ میں بکھینچ رائج کیا جو فیسپر موجد لوکارتم کا ہم عصر تھا۔

مساوات ۱۰ = 10^0 کے ظاہر ہے کہ مروج لوکارتم بالعموم صحیح عدد نہیں ہوتے اور نہ وہ ہمیشہ مثبت ہوتے ہیں مثلاً

$$۳۱۵۴ < ۱۰^۲ \text{ اور } ۱۰^۱$$

$$\therefore \text{لوک } ۳۱۵۴ = ۳ + \text{ایک کسر}$$

$$\text{نیز } ۶۰۶ < ۱۰^{-۲} \text{ اور } ۱۰^{-۱}$$

$$\text{اسلئے لوک } ۶۰۶ = -۲ + \text{ایک کسر}$$

۲۴۷ - تعریف کسی لوکارتم کے صحیح حصہ کو تمیز (یا الحد و بیانی)

اور حصہ اعشاریہ کو اعشاریہ لوکارتمی کہتے ہیں۔

$$\text{مثال - لوک } ۲۰ = ۱۰ + ۱۰ = ۱$$

اس میں لوک ۲۰ کا میز ایک ہے اور اس کا اعشاریہ لوکارتمی ۳۰۱۰ ہے۔ کسی عدد کے لوکارتم کا میز اس ۱۰ پر صرف دیکھنے سے ہی لکھا جاسکتا ہے جیسا کہ دفعات ذیل سے ظاہر ہے۔

۲۲۸۔ کوئی عدد ایک سے بڑا ہے اسکے لوکارتم کا میز دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ } ۱۰ = ۱۰$$

$$۱۰۰ = ۲۰$$

$$۱۰۰۰ = ۳۰$$

.....

اس سے ظاہر ہے کہ جس عدد کے صحیح حصہ میں دو ہند سے ہوں وہ ۱۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوگا اور جس عدد کے صحیح حصہ میں تین ہند سے ہوں وہ ۲۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوگا اور علیٰ ہذا فیقاس۔ اس لئے معلوم ہوا کہ ایسا عدد جس کے صحیح حصے میں ۱۰ ہند سے ہوں وہ ۳۰ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہوگا۔

اگر م ایسا عدد ہو جس کے صحیح حصے میں ۱۰ ہند سے ہوں تو

$$م = ۱۰(۱۰ - ۱) + \text{ایک کسر}$$

$$= \text{لوک م} = (۱۰ - ۱) + \text{ایک کسر}$$

لوکارتم کا میز (۱۰ - ۱) ہے پس معلوم ہوا کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو تو اس کے لوکارتم کا میز مثبت ہوگا اور ان ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصے میں ہو بقدر ایک کے کم ہوگا۔

$$\text{مثال} - ۱۲۵ < ۲۰ \text{ اور } ۲۱۰ > ۲۰$$

$$= \text{لوک } ۱۲۵ = ۲ + \text{اعشاریہ لوکارتمی}$$

اس لئے لوگ ۱۲۵ کا میز ۲ ہے

۲۳۵ < ۲۰ اور > ۱۰

اس لئے لوگ ۲۳۵ کا میز ۳ ہے

۶۷۵۰ < ۱۰ اور > ۱۰

اس لئے لوگ ۶۷۵۰ کا میز ایک ہے

۲۲۹ - کسی کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا میز دریافت کرو۔

چونکہ $1 = \frac{1}{1}$

$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$

$\frac{1}{1000} = \frac{1}{1000}$

اس سے ظاہر ہے کہ جس کسر اعشاریہ میں علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہو (مثلاً ۰.۳۲ جو ۰.۱ سے بڑی ہے اور ۱ سے چھوٹی) وہ ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہوگی اور وہ کسر جس میں علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہوں وہ ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہوگی اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس سے معلوم ہوا کہ ایسی کسر اعشاریہ جس میں علامت اعشاریہ کے مین بعد n صفر ہوں وہ $10^{-(n+1)}$ اور 10^{-n} کے درمیان واقع ہوگی فرض کرو کہ E کوئی کسر اعشاریہ ہے جس میں علامت اعشاریہ کے

مین بعد n صفر ہیں
تو $E = \frac{10^{-(n+1)} + \dots + 10^{-n}}{10}$ ایک کسر

∴ لوگ $E = - (n + 1) + \dots + 1$ ایک کسر

اس لئے ممیز مطلوب - (ن + ۱) ہے یعنی معلوم ہوا کہ ہر ایک کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا ممیز منفی ہوتا ہے اور علامت اعشاریہ کے مین بعد جتنے صفر ہوں ان کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے

مثال - $۱۳ = ۳۳$ جو < ۱۰ اور > ۱

یعنی یہ < ۱۰ اور > ۱

اس لئے لوک $۱۳ = ۱ - ۱$ ایک کسر اعشاریہ

اس لئے لوک ۱۳ کا ممیز - ۱ ہے

$۱۰۳۵ < ۱۰$ اور > ۱

یعنی یہ < ۱۰ اور > ۱

اس لئے لوک $۱۰۳۵ = ۲ - ۱$ ایک کسر اعشاریہ

اس لئے لوک ۱۰۳۵ کا ممیز - ۲ ہے

$۱۰۳۵۸۱ < ۱۰۰۰۰$ اور > ۱۰۰۰

یعنی یہ < ۱۰۰۰ اور > ۱۰

اس لئے لوک ۱۰۳۵۸۱ کا ممیز - ۵ ہے

۲۳۰ - ایک سے لیکر ۲۰۰۰۰ تک تمام صحیح

اعداد کے لوکارتم اساس دس پر نکالے گئے ہیں اور ان کو جدولوں کی شکل میں لکھا گیا ہے اکثر جداول لوکارتمی میں لوکارتم سات مرتبہ کے اعشاریہ تک مندرج ہوتے ہیں۔ عملیات میں نظام عشری زیادہ تر استعمال ہوتا ہے اس کے دو بڑے فوائد یہ ہیں -

(۱) ان نتائج سے جو ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں ظاہر ہے کہ ممیز

صرف دیکھنے سے ہی لکھے جاسکتے ہیں اس لئے جداول میں صرف اشاریہ لوکارتمی مندرج کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

(۲) جن عددوں کے ملخوظ ہندسے وہی ہوں ان میں سے ہر ایک کا اشاریہ لوکارتمی وہی ہوتا ہے پس نظام عشری میں صرف صحیح اعداد کے لوکارتمی اشاریوں کو جدولوں میں مندرج کرنا کافی ہوتا ہے۔ اگلی دفعہ میں ہم یہی دعویٰ ثابت کریں گے۔

نوٹ۔ کسی عدد کے ملخوظ ہندسے وہ ہوتے ہیں جو اول اور آخر سے تمام صفر دور کرنے پر باقی رہ جائیں۔ مثلاً ۳۲۰۱۶ اور ۳۲۰۱۶۰۰۰ کے ملخوظ ہندسے ۳۲۰۱۶ ہیں

۲۳۱۔ فرض کرو کہ n کوئی عدد ہے۔ اگر اسے دس کی کسی قوت سے ضرب دی جائے یا اس کو دس کی کسی قوت پر تقسیم کیا جائے تو صرف مقام اشاریہ میں فرق آتا ہے مگر ہندسوں کی ترتیب نہیں بدلتی۔ اس سے ظاہر ہے کہ $n \times 10$ اور $n \div 10$ (جہاں n اور q دونوں صحیح ہیں) ایسے اعداد ہیں جن کے ملخوظ ہندسے وہی ہیں جو n کے ہیں۔

اب لوک $(n \times 10)$ = لوک n + ف لوک ۱۰

$$= \text{لوک } n + \text{ف} \dots (۱)$$

نیز لوک $(n \div 10)$ = لوک n - ف لوک ۱۰

$$= \text{لوک } n - \text{ف} \dots (۲)$$

ظاہر ہے کہ ربط (۱) میں لوک n پر صرف ایک صحیح عدد کا اضافہ ہو گیا ہے اور (۲) میں ایک صحیح عدد لوک n میں سے منفی ہو گیا ہے یعنی

ثابت ہوا کہ ہر صورت میں اعشاریہ لوکارتمی وہی رہتا ہے۔ اس دفعہ میں اورتین گذشتہ دفعات میں اعشاریہ لوکارتمی مثبت فرض کیا گیا ہے۔ نظام برگس سے پورا فائدہ اٹھانے کے لئے ہم اپنے حسابی اعمال میں اس بات کا خیال رکھتے ہیں کہ اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت رہے تاکہ جب ہم اعشاریہ لوکارتمی کو جدولوں سے لیں تو فقط ممیز کو صیح اس کی مناسب علامت کے اس کے مابین لکھیں۔

۴۳۴ — منفی لوکارتم کی صورت میں منفی علامت کو ممیز کے اوپر لکھتے ہیں اور اس کے پہلے نہیں لکھتے تاکہ معلوم ہو کہ صرف ممیز ہی منفی ہے اور سب کا سب جملہ منفی نہیں ہے، پس ۳۰۱۰۳ + ۲۰۰۲ کا لوکارتم ہے = ۳۰۱۰۳ + ۲۰۰۲ اس کو ۳۰۱۰۳ - ۲۰۰۲ سے مختلف خیال کرنا چاہئے جو ایک ایسا جملہ ہے جس میں حصص صحیح اور اعشاریہ دونوں منفی ہیں۔ اعشاریہ لوکارتمی کو مثبت بنانے کے لئے بعض اوقات یہ حسابی ترکیب مفید ثابت ہوئی ہے، مثلاً فرض کرو کہ ایک رقم - ۴۹۸۹۷ معلوم ہے جس میں سب کا جملہ منفی ہے، اگر ہم ممیز سے ایک منفی کریں اور اعشاریہ لوکارتمی میں ایک جمع کریں تو رقم مجوزہ صورت مذکورہ میں تحویل ہو سکتی ہے یعنی - ۴۹۸۹۷ = ۳ - ۱ - ۴۹۸۹۷

$$= ۳۰۱۰۳ + ۲۰۰۲$$

اس قسم کی اور کئی صورتیں آگے دیکھنے میں آئیں گی۔
مثال ۱- ۳۲۴۰۰۰ کا لوکارتم دریافت کرو۔

اس لئے ضروری ہے کہ ہم کسی ایک نظام لوکارتمی کو جس کا اساس معلوم ہو کسی نئے نظام لوکارتمی میں جس کا اساس مختلف ہو تبدیل کرنے کی ترکیب دریافت کریں۔

۴۳۴۔ فرض کرو کہ کل اعداد کے لوکارتم اساس ۱ پر معلوم ہیں اور جدولوں میں مندرج ہیں اور اساس ۲ پر لوکارتم بنائے مطلوب ہیں۔

فرض کرو کہ n کوئی عدد ہے جس کا لوکارتم اساس ۲ پر نشان مطلوب ہے، فرض کرو کہ $a = \text{لوک } n \text{ یعنی } ۲ = n$

$$۱. \text{ لوک } (۲) = \text{لوک } n$$

$$\text{یعنی } ۱ \text{ لوک } ۲ = \text{لوک } n$$

$$۲. ۱ = \frac{۱}{\text{لوک } ۲} \times \text{لوک } n$$

$$\text{یا } \text{لوک } n = \frac{۱}{\text{لوک } ۲} \times \text{لوک } n \dots\dots (۱)$$

اب چونکہ n اور b معلوم ہیں اس لئے $\text{لوک } n$ اور $\text{لوک } b$ جدولوں سے معلوم ہو سکتے ہیں اور اس طرح $\text{لوک } n$ معلوم ہو سکتا ہے۔

پس ظاہر ہے کہ لوکارتموں کو اساس ۱ سے اساس ۲ میں تبدیل کرنے کے لئے صرف اتنا ضروری ہے کہ ہم انھیں $\frac{۱}{\text{لوک } ۲}$ میں ضرب دیدیں اور یہ ایک مستقل مقدار ہے جو جدولوں سے معلوم ہو سکتی ہے،

۴۳۵۔ کو لوکارتموں کا مقیاس یا مضروب معین کہتے ہیں۔
دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) میں n کی جگہ ۱ لکھنے سے

$$\text{لوک پ ا} = \text{لوک ب} \times \text{لوک و ا} = \text{لوک و ب}$$

$$\therefore \text{لوک پ ا} \times \text{لوک و ب} = \text{ا}$$

اس نتیجہ کو بلا واسطہ ہم اس طرح ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{لوک و ب}$ یعنی $\text{ا} = \text{ب}$

اساس ب پر لوکارتم لینے سے

$$\text{ا} = \text{لوک پ ا} = \text{لوک ب} = \text{ا}$$

$$\therefore \text{لوک ب} \times \text{لوک پ ا} = \text{ا}$$

مثال ۱۔ $\text{لوک پ ا} \times \text{لوک و ب} \times \text{لوک ج}$ کو مختصر کرو۔

$\text{لوک پ ا} = \text{لوک و ب} \times \text{لوک و ا}$ اگر نیا اساس ج یا جائے۔

اب $\text{لوک پ ا} \times \text{لوک و ب} = \text{لوک و ب} \times \text{لوک و ا} \times \text{لوک و ب}$

$$= \text{لوک و ا}$$

$$\therefore \text{لوک پ ا} \times \text{لوک و ب} \times \text{لوک ج}$$

$$= \text{لوک و ا} \times \text{لوک ج} = \text{لوک د ا}$$

یا لوکارتمی ضابطہ کی مدد کے بغیر یہ اس طرح حل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{لوک پ ا} = \text{ا}$ $\therefore \text{ا} = \text{ب}$

$$۳۶۶۲۸۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۵۶۸۵ - ۳۶۶۲۸۰۰۰۰۰۰۰۰ =$$

طالب علم دیکھ لیگا کہ ۵ یا ۵ کی کسی قوت کا لوکارتم ہمیشہ لوک ۲ سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

$$\text{لوک } ۵ = \text{لوک } \frac{۱}{۲} = \text{لوک } ۱۰ - \text{لوک } ۲ = ۱ - \text{لوک } ۲$$

مثال ۲ — (۸۷۵) میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ اور لوک ۷ = ۵۰۹۸۰ =

$$\text{لوک } (۸۷۵) = ۱۶ = \text{لوک } (۱۲۵ \times ۷)$$

$$۱۶ = (\text{لوک } ۷ + \text{لوک } ۱۲۵)$$

$$۱۶ = (\text{لوک } ۷ + ۳ \text{ لوک } ۵)$$

$$۱۶ = (\text{لوک } ۷ + ۳ - ۳ \text{ لوک } ۲)$$

$$۲۶۹۲۲۰۰۰۰۰ \times ۱۶ =$$

$$۴۷۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰ =$$

اس لئے ہندسوں کی تعداد ۴۷۸ ہے (صفحہ ۲۲۸)

مثال ۳ — لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

سادات ۲۶ - ۲۷ = ۵ + ۷ = ۸ سے لاکھ قیمت ۲ مرتبہ کے

اعشاریہ تک دریافت کرو۔

طرفین کے لوکارتم لینے سے

$$(۳ - ۲) \text{ لا } \text{لوک } ۶ + (۵ + ۷) \text{ لوک } ۲ = \text{لوک } ۸$$

$$\therefore (۳ - ۲) \text{ لا } (\text{لوک } ۶ + ۲ \text{ لوک } ۳) + (۵ + ۷) \text{ لوک } ۲ = ۳ \text{ لوک } ۲$$

$$\therefore \text{لا } (۳ - ۲) \text{ لوک } ۲ - ۳ \text{ لوک } ۲ + ۲ \text{ لوک } ۲ = ۳ \text{ لوک } ۳ - ۲ \text{ لوک } ۲$$

$$۳ - ۳ \text{ لوک } ۳ - ۱۰ \text{ لوک } ۲$$

$$\frac{۱۰ \text{ لوک } ۳ + ۲ \text{ لوک } ۳}{۲ \text{ لوک } ۲ + ۳ \text{ لوک } ۳} = ۱۰$$

$$۱۵۷۷ \dots\dots\dots = \frac{۳۶۳۱۶۶۳۹}{۲۵۵۱۰۵۴۵۲} =$$

مثال ۴ — ۳ کی کونسی قوت ۱۰ کے نہایت قریب ہے؟
(لوک ۳ = ۱۵۷۷۱)

فرض کرو کہ ۳ = ۱۰

طرفین کے لوکار تم لینے سے لالوک ۳ = ۸

اس لئے ۱۰ = $\frac{۸}{۳}$ = $\frac{۸}{۱۵۷۷۱}$ (تقریباً) ۱۶۵۸
یہ ۱۶ نسبت ۱۰ کے زیادہ قریب ہے اس لئے ۱۰ قوت مطلوبہ ہے؟

اصول اجزاء متناسب

۴۴۳ — جن اعداد کے فرق چھوٹی مقداروں سے تعبیر ہو سکیں ان کے لئے یہ مسئلہ درست ہے مگر لوکارتوں کے فرق ان کے متعلقہ اعداد کے فرقوں کے تقریباً متناسب ہوتے ہیں۔
یہ اصول جداول کے مرتب کرنے اور ایک خاص حد تک ان کے استعمال میں نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثلاً اگر لوک ۲۱۳ اور لوک ۲۱۴ معلوم ہوں تو اس اصول کی مدد سے لوک ۲۱۳۵ دریافت ہو سکتا ہے

$$\text{لوک } ۲۱۳ = ۳۵۳۲۸۴$$

$$\text{اور لوک } ۲۱۴ = ۳۵۳۳۰۴$$

اس جگہ عددوں کا تفاوت ایک ہے اور ان کے لوکارنتوں کا ۲۰۰۔ ۱
اگر عددوں کا فرق ایک کا پلہ ہوتا تو ان کے لوکارنتوں کا فرق بھیج
مسد اجزاء متناسب پلہ ۲۰۰۔ ۱ ہوتا اور اسی طرح باقی صورتوں میں
اگر لوک ۲۱۳ کی مدد سے لوک (۲۱۳ + ۶) نکالنا منظور ہو تو فرض
کرو کہ اس کو ہم (۲۱۳ + ۲۸۳ + ۶) سے تعبیر کرتے ہیں جہاں ۶
وہی کسر ہے ۲۰۰۔ ۱ کی جو ۶ ہے ایک کی۔

پس لوک ۲۱۳۷ = لوک (۲۱۳ + ۶) = ۲۱۳۷۳۸۳ + ۶

جہاں $\frac{۱۰۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۲}$ کے یعنی ۶ = ۳۔ ۱

اس لئے لوک ۲۱۳۷۳۸۳ = ۲۱۳۷۳۸۳ + ۳۰۰۱۴ = ۲۱۳۷۶۸۳

۳۴۸ — جدول حسابیہ

لوکارنم

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۱۵	۱۶۹۱	۱۶۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۶	۱۸۷۵	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴	۲۰۴۲	۲۰۷۰	۲۱۰۸	۲۱۳۶	۲۱۶۴	۲۱۹۲
۱۶	۲۰۳۹	۲۰۶۸	۲۰۹۷	۲۱۲۵	۲۱۵۴	۲۱۸۳	۲۲۱۱	۲۲۴۰	۲۲۶۹	۲۲۹۸	۲۳۲۷	۲۳۵۶	۲۳۸۵	۲۴۱۴	۲۴۴۳	۲۴۷۲
۱۷	۲۴۹۱	۲۵۲۰	۲۵۴۹	۲۵۷۸	۲۶۰۷	۲۶۳۶	۲۶۶۵	۲۶۹۴	۲۷۲۳	۲۷۵۲	۲۷۸۱	۲۸۱۰	۲۸۳۹	۲۸۶۸	۲۸۹۷	۲۹۲۶
۱۸	۲۹۵۵	۲۹۸۴	۳۰۱۳	۳۰۴۲	۳۰۷۱	۳۱۰۰	۳۱۲۹	۳۱۵۸	۳۱۸۷	۳۲۱۶	۳۲۴۵	۳۲۷۴	۳۳۰۳	۳۳۳۲	۳۳۶۱	۳۳۹۰
۱۹	۳۴۱۸	۳۴۴۷	۳۴۷۶	۳۵۰۵	۳۵۳۴	۳۵۶۳	۳۵۹۲	۳۶۲۱	۳۶۵۰	۳۶۷۹	۳۷۰۸	۳۷۳۷	۳۷۶۶	۳۷۹۵	۳۸۲۴	۳۸۵۳
۲۰	۳۸۸۲	۳۹۱۱	۳۹۴۰	۳۹۶۹	۳۹۹۸	۴۰۲۷	۴۰۵۶	۴۰۸۵	۴۱۱۴	۴۱۴۳	۴۱۷۲	۴۲۰۱	۴۲۳۰	۴۲۵۹	۴۲۸۸	۴۳۱۷
۲۱	۴۳۴۶	۴۳۷۵	۴۴۰۴	۴۴۳۳	۴۴۶۲	۴۴۹۱	۴۵۲۰	۴۵۴۹	۴۵۷۸	۴۶۰۷	۴۶۳۶	۴۶۶۵	۴۶۹۴	۴۷۲۳	۴۷۵۲	۴۷۸۱
۲۲	۴۸۱۰	۴۸۳۹	۴۸۶۸	۴۸۹۷	۴۹۲۶	۴۹۵۵	۴۹۸۴	۵۰۱۳	۵۰۴۲	۵۰۷۱	۵۱۰۰	۵۱۲۹	۵۱۵۸	۵۱۸۷	۵۲۱۶	۵۲۴۵

$$\frac{۱۰ \text{ لوک } ۳ + ۲ \text{ لوک } ۳}{۲ \text{ لوک } ۴ + ۲ \text{ لوک } ۳} = ۱۰$$

$$۱۵۷۷ \dots\dots\dots = \frac{۳۶۳۴۱۶۶۳۹}{۲۵۵۱۰۵۴۵۲} =$$

مثال ۴ — ۳ کی کونسی قوت ۱۰ کے نہایت قریب ہے؟
(لوک ۳ = ۱۵۷۷۱)

فرض کرو کہ ۱۰ = ۱

طرفین کے لوکار تم لینے سے ۸ = ۳ لاوک ۳

اس لئے ۱۰ = ۱ = $\frac{۱}{۱۰}$ = $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰}$ (تقریباً) ۱۶۵۸ =
یہ ۱۶ نسبت ۱ کے زیادہ قریب ہے اس لئے ۱۰ قوت مطلوبہ ہے؟

اصول اجزاء متناسب

۴۴۳ — جن اعداد کے فرق چھوٹی مقداروں سے تعبیر ہو سکیں ان کے لئے یہ مسئلہ درست ہے مگر لوکارتموں کے فرق ان کے متعلقہ اعداد کے فرقوں کے تقریباً متناسب ہوتے ہیں۔
یہ اصول جداول کے مرتب کرنے اور ایک خاص حد تک ان کے استعمال میں نہایت مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثلاً اگر لوک ۲۱۳ اور لوک ۲۱۴ معلوم ہوں تو اس اصول کی مدد سے لوک ۲۱۳۵ دریافت ہو سکتا ہے

$$\text{لوک } ۲۱۳ = ۳۳۲۸۴$$

$$\text{اور لوک } ۲۱۴ = ۳۳۳۰۴$$

مندرجہ بالا اقتباس چار ہندسوں والے لوکارتمی جدولوں سے کیا گیا ہے اس کی مدد سے کسی عدد کا لوکارتم حاصل ہو سکتا ہے مثلاً فرض کرو کہ لوک ۱۷۵۶ مطلوب ہے، جس سطر کے شروع میں ۱۷ لکھا ہوا ہے اس کی دائیں طرف سے بائیں طرف دیکھتے جاؤ جب تک کہ اُس عدد کی نوبت نہ آجائے جس کی سمت اس میں سب سے اوپر ۱۵ لکھا ہوگا وہ عدد ۲۴۳۰ ہے، آخری ۶ کے متعلق صفحہ کی بائیں طرف ہندسہ ۶ کے نیچے عمودی سطر میں ۱۵ لکھا ہوا ہے۔ حاصل مطلوب ۲۴۳۵ ہوگا جدولوں میں لوکارتم کا مقام اعشاریہ نہیں لکھا جاتا، فی الحقیقت اوپر کے اعداد ۲۴۳۰ اور ۱۵ میں جن کا مجموعہ ۲۴۳۵ ہے اور یہ ایک ایسے عدد کا اعشاریہ لوکارتمی ہے جس کے طوط ہندسے ۱۷۵۶ ہیں، مناسب تمیز زیادہ کرنے سے لوک $۱۷۵۶ = ۲۴۳۵$

نیز لوک $۱۷۵۶ = ۱۲۴۳۵$

اور لوک $۱۷۵۶ = ۲۴۳۵$

کیونکہ اگر اعداد کے طوط ہندسے وہی ہوں تو ان کے لوکارتمی اعتبار سے وہی ہوتے ہیں۔

اگر لوک ۱۷۵۶ مطلوب ہو تو بموجب اصول اجزاء متناسب ہیں، کے متعلق فرق کا $\frac{1}{2}$ واں حصہ یعنی $\frac{1}{2} \times ۱۷۵۶ = ۸۷۸$ عدد ۱۷۵۶ کے لوکارتم پر زیادہ کرنا چاہئے۔

پس لوک $۱۷۵۶ + ۸۷۸ = ۲۶۳۴$

۲۶۳۴ — اگر اعداد سلسلہ ہندیہ میں ہوں تو ان کے لوکارتم سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

فرض کرو کہ مجوزہ اعداد 'ما'، 'ماہ'، 'مان' مان ہیں اگر 'ما' کا لوکارتم
اساس لا پر عہ ہو اور سلسلہ ہندسیہ 'ما'، 'ماہ'، 'مان' مان کی
نسبت مشترک کا لوکارتم بہ ہو تو مطابق قیمتوں کے مفصلہ ذیل
سلسلے حاصل ہونگے۔

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ما} & \text{ماہ} & \text{مان} & & & & \\ \text{۱} & \text{۱۰} & \text{۱۰۰} & & & & \\ \text{۱} & \text{۱۰} & \text{۱۰۰} & & & & \\ \text{۱} & \text{۱۰} & \text{۱۰۰} & & & & \end{array}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے

یہ ایک تاریخی واقعہ ہے کہ دو سلسلوں (ہندسیہ اور حسابیہ) کے باہم
مقابلہ کرنے کا خیال لوکارتم کی ایجاد کا باعث ہوا اور لوکارتم
کی تمام پرانی ترکیبیں اسی طرز عمل پر مبنی ہیں۔ اس کی توضیح کیلئے
ایک مثال مندرجہ ذیل ہے۔

فرض کرو کہ دو اعداد معینہ 'ما' اور 'ماہ' کے لوکارتم بالترتیب 'لا' اور 'لاہ'
ہیں ہم 'ما' اور 'ماہ' کے درمیان جتنے اعداد کے لوکارتم دریافت کرنا
چاہیں کر سکتے ہیں، ہمیں معلوم ہے۔

$$\text{ما} = \text{لا}^{\frac{1}{10}} \quad \text{ماہ} = \text{لا}^{\frac{1}{100}}$$

اب 'لا' اور 'ماہ' کے درمیان ایک اوسط ہندسی 'ماہ' مندرج کرو۔

$$\text{تب} \quad \text{ما} = (\text{لا} \cdot \text{ماہ})^{\frac{1}{2}} = \text{لا}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{200}} = \text{لا}^{\frac{101}{200}} \quad (\text{فرض کرو})$$

جہاں 'لاہ' اوسط حسابی ہے 'لا' اور 'لاہ' کے درمیان۔ اس طرح نظام ذیل حاصل ہوگا

لوکارقم لا لا لا
 عدد با با با
 اس کے بعد با ، لا اور ماہ ، ماہ کے درمیان اواسط ہندسیہ مندرج
 کرو جو عدد ان اواسط کو تعبیر کریں گے اُن کے لوکارقم بالترتیب
 لا ، لاہ اور لاہ لاہ کے اواسط حسابیہ ہوں گے، اس طرح سے ہمیں
 نظام ذیل حاصل ہوگا

لوکارقم لا لاہ لاہ لاہ
 عدد با با با با
 اور اسی طرح عمل کرنے سے ہمیں نظام ذیل حاصل ہوگا

لوکارقم لا لاہ لاہ لاہ لاہ لاہ لاہ
 عدد با با با با با با با
 اور علیٰ ہذا القیاس ، اس قسم کے حساب ہیں ہر دفعہ اعمال ضرب ، استخراج جذر اور جمع
 سے کام لینا پڑتا ہے اور ہر دفعہ ایسا کرنے سے ایک نیا عدد اور اسکا لوکارقم حاصل ہوتا ہے
 عددی مثال - اگر $1 = 1$ ، $10 = 1$ ، $1 = 1$ ، $10 = 1$ ، $1 = 1$ ، $10 = 1$ ، $1 = 1$ ،
 موافق بالا عمل کرنے سے ہمیں جدول ذیل حاصل ہوگی

لوکارقم	عدد	لوکارقم	عدد
۰۵۶۲۵۰	۴۵۶۱۷۰	۰۵۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰
۰۵۷۵۰۰	۵۵۶۲۳۵	۰۵۱۲۵۰	۱۵۳۳۳۹
۰۵۸۷۵۰	۷۵۶۹۹۰	۰۵۲۵۰۰	۱۵۷۷۸۳
۱۵۰۰۰۰	۱۰۵۰۰۰۰	۰۵۳۷۵۰	۲۵۳۷۱۴
		۰۵۵۰۰۰	۳۵۱۶۲۲

عکسی لوکارتم



۲۴۰۔ — تعریف اگر ن کا لوکارتم لاہو تون کو لا کا عکس لوکارتم یا عکسی لوکارتم کہتے ہیں۔

اگر کسی عدد کی ترکیب میں متعدد ہند سے ایک خاص ترتیب میں شامل ہوں اور ہندسوں کی اس ترتیب کا عکسی لوکارتم دریافت کرنا ہو (یعنی وہ عدد معلوم کرنا ہو جس کا لوکارتم یہ ترتیب معلوم ہے) تو جدولوں کے خانوں میں ہندسوں کی اس ترتیب کو یا اس سے اگلے درجہ کی کم ترتیب کو تلاش کرنا چاہئے مگر دوسری صورت میں بائیں طرف کے خانوں کی مدد سے تفاوت کا خیال کر لینا چاہئے عکس لوکارتمی جدولوں کے استعمال سے بہت محنت بچے گی، ان کا طریق استعمال لوکارتمی جدولوں کے استعمال کا سا ہے۔

یاد رہے کہ جدول میں صرف اعشاریہ لوکارتمی اور عکسی لوکارتم کے ملحوظ ہند سے مندرج ہوتے ہیں، عکسی لوکارتم میں علامت اعشاریہ کا مقام دیئے ہوئے ممیز سے معلوم ہو سکتا ہے۔

عکس لوح کا رقم

[illegible]

۲۴۴۵ء اور ۳۲۴۴۵ء کے عکسی لوکارتم دریافت کرو۔
 عکسی لوکارتم کے ملحوظ ہند سے اس طرح معلوم ہوتے ہیں:- جو
 سطر ۲۴۴۵ء سے شروع ہوتی ہے اس کے متوازی دیکھتے جاؤ
 جب تک کہ اُس عدد کی نوبت نہ آجائے جس کی سمت اس میں
 سب سے اوپر لکھا ہوا ہے یہ عدد ۱۷۵۴ ہے، اسی افقی سطر
 میں صفحہ کے بائیں طرف عمودی خانوں میں عدد ۵ کے پہنچنے
 لکھا ہوا ہے اس کو ۱۷۵۴ پر زیادہ کرو پس ۲۴۴۵ء کا
 عکسی لوکارتم ۱۷۵۴ ہوا کیونکہ کل ملحوظ ہند سے عدد ۱۷۵۴

میں شامل ہیں اور میز صفر سے ظاہر ہے کہ عکسی لوکارتم میں صرف ایک صحیح ہندسہ ہے۔

نیز معلوم ہوا کہ ۱۷۵۶ کا لوکارتم ۳۵۴۳۲۳۵ ہے۔

۲۴۱ — لوکارتمی جدولوں کو اس طرح استعمال کیا جاسکتا ہے کہ میز دریافت کرنے کے مندرجہ بالا قوانین کی مدد کے بغیر مناسب میز معلوم ہو جائے اور ترکیب استعمال سے اس کا پورا پتہ چل جائے۔ جدولوں میں لوکارتم اس طرح لکھے جاتے ہیں کہ ان کا میز صفر ہو اس سے ظاہر ہے کہ ہر ایک لوکارتم اس صورت میں ایک ایسے عدد کو تعبیر کرتا ہے جس کی ترکیب میں صرف ایک صحیح ہندسہ شامل ہوتا ہے۔ اب اگر ہم اس کو اپنی صورت عامہ مان لیں تو تمام اعداد جن کے لوکارتم مطلوب ہوں ۱۰ کی کسی قوت میں ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے اس صورت عامہ کی رقوم میں لائے جاسکتے ہیں۔

مثلاً لوک $۷۱۲۵۳ = ۱۸۶۰۵$ ۔

لوک $۷۱۲۵۳ = (۱۰ \times ۷۱۲۵۳) = ۷۱۲۵۳۰ = ۳۵۸۶۰۵$

لوک $۷۱۲۵۳ = ۱۰۰۰ \times ۷۱۲۵۳ = (۱۰۰ \times ۷۱۲۵۳) = ۷۱۲۵۳۰۰ = ۳۵۸۶۰۵$

لوکارتمی شالیں حل کرنے سے پیشتر طالب علم کو لوکارتمی اور عکسی لوکارتمی جدول کے استعمال کی زبانی مشق کرنی چاہئے۔ جدولوں سے دریافت کرو۔

لوک ۷۱۲۵۳ ، لوک ۷۱۲۵۳۰ ، لوک ۷۱۲۵۳۰۰ وغیرہ
جدولوں سے وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارتم ہوں۔

۳۵۴۳۲۳۵ ، ۱۷۵۶ ، ۱۰۸۲۳ ، ۱۰۸۲۳۵ ، ۱۰۸۲۳۵۸ ، ۱۰۸۲۳۵۸۰ وغیرہ

مثال ۱۔ ایک مکعب کا حجم ۳ مکعب فٹ ۹۰۴ مکعب انچ ہے، اس کے کنارے کی لمبائی دریافت کرو۔
 ۳ مکعب فٹ ۹۰۴ مکعب انچ = ۹۰۸ مکعب انچ۔

$$\text{لوک } \sqrt[3]{908} = \frac{1}{3} \text{ لوک } 908 = \frac{36845}{3} = 12281\frac{5}{3}$$

عکس لوکارتمی جدولوں سے معلوم ہوگا کہ ۱۲۶۱ کے مقابل عدد ۱۸۲۶ ہے اور بائیں طرف کے عمودی خانوں سے آخری ۵ کے لئے ۲ زیادہ کرنا چاہئے۔ اس لئے ملحوظ ہند سے مطلوب ۱۸۲۶ ہیں۔

۱۲۶۱۲ کے میز ایک سے ظاہر ہے کہ عدد مطلوب میں دو صحیح ہند سے ہیں۔

$$\text{اس لئے عکس لوک } 12612 = 1826$$

$$1826 = \sqrt[3]{908}$$

اس لئے کنارے کی لمبائی ۱۸۲۶ انچ ہے، تھوڑی سی شق کے بعد صرف یہی لکھنا کافی ہوگا۔

$$\text{لوک } \sqrt[3]{908} = \frac{1}{3} \text{ لوک } 908 = \frac{36845}{3}$$

$$= 12281\frac{5}{3} = \text{لوک } 1826$$

کنارے کی لمبائی = ۱۸۲۶ انچ = ۱۵ فٹ ۶ انچ

مثال ۲۔ (اپونڈ، ۳ شلنگ ۶ پینس) ۸۴۵ کی قیمت دریافت کرو۔

$$1 \text{ اپونڈ، } 3 \text{ شلنگ } 6 \text{ پینس} = 1515 \text{ اپونڈ}$$

$$\begin{aligned} \text{لوک } (۱۵۷۵۱۵۸ \times ۱۷۷۸۴) &= \text{لوک } ۱۷۷۸۴ + \text{لوک } ۱۷۷۸۴ \\ &= ۱۷۷۸۴ + ۱۷۷۸۴ = ۳۵۵۶۸ \\ &= \text{لوک } ۹۲۱۲ \end{aligned}$$

اس لئے قیمت مطلوبہ = ۹۲۱۲ پونڈ = ۱۸ شلنگ، ۵ پنس
مثال ۳ — ۳۷ کا جذر نکالو۔

$$\overline{۳۸} = \text{عکس لوک (لوک } \overline{۳۸} \text{)}$$

$$\begin{aligned} &= \text{عکس لوک } \left(\frac{۱}{۱۰} \text{ لوک } ۳۷ \right) = \text{عکس لوک } \left(\frac{۱}{۱۰} \times ۸۶۳۳۷ \right) \text{ (جدولوں سے)} \\ &= \text{عکس لوک } (۸۶۳۳۷) = ۵۴۴۸ \text{ (جدولوں سے)} \end{aligned}$$

مثال ۴ — معلوم ہے لوک ۳۷۵۰ = ۳۷۵۰
اور لوک ۳۷۹۱ = ۳۷۹۱

عکس لوک ۳۷۸۸ دریافت کرو
عدد مطلوب صریحاً ۳۷۵۰ اور ۳۷۹۰ کے درمیان واقع ہے
فرض کرو کہ یہ ۳۷۵۰ + لا ہے۔

$$۳۷۹۱ - ۳۷۵۰ = ۴۱$$

$$۳۷۸۸ - ۳۷۵۰ = ۳۸$$

اس لئے بموجب اصول اجزاء تناسب $\frac{۳۸}{۴۱} = \frac{۳۷۵۰}{x}$
اور لا = $\frac{۳۷۵۰ \times ۳۸}{۴۱}$ = ۳۷۵۸ (قریب ترین صحیح عدد تک)
اس لئے ۳۷۵۸ = عکس لوک ۳۷۸۸

امثلہ نمبری ۲۹

(۱)

۱- مفصلہ ذیل لوکارتموں کے ممیز صرت دیکھنے سے ہی دریافت کرو۔

۲۱۷۳۵ ' ۲۳۶۸ ' ۳۵۰ ' ۵۰۳۵ ' ۵۲ ' ۵۸۷ ' ۵۸۷۵

۲- لوک ۷۶۲۳ کا اعشاریہ لوکارتمی ۹۸۸۲۱۲۵۹ ہے ' مفصلہ ذیل اعداد کے لوکارتم لکھو

۷۵۶۲۳ ' ۷۶۲۵۳ ' ۵۰۰۷۶۲۳ ' ۷۶۲۳۰۰ ' ۷۶۲۳۰۰۰۰۰

۳- جن عددوں کے لوکارتم بالترتیب ۳۰۱۰۳ ' ۳۷۹۱۲۱۳ ' ۳۷۹۸۹۷

۵۶۵۱۵ ہیں اُن کے صحیح حصوں میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو۔

۴- جن عددوں کے لوکارتم ۷۷۷۸۱۵۱۳ ' ۷۹۱۰۸۱۵ ' ۷۹۱۰۸۱۵

۵۶۲۸۷۱۳۸۳ ہیں اُن کے پہلے ملحوظ ہندسوں کے مقام دریافت کرو۔

معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ' لوک ۳ = ۷۷۷۸۱۵۱۳

اور لوک ۷ = ۷۸۳۵۰۹۸۰

مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو

۵- لوک ۶۲ - ۶- لوک ۸۲ - ۷- لوک ۱۲۸

۸- لوک ۵۰۱۲۵ - ۹- لوک ۱۳۷۳ - ۱۰- لوک ۱۲

۱۱- لوک $\sqrt[3]{14}$ ۱۲- لوک $\sqrt[3]{\frac{35}{4}}$ ۱۳- لوک $\sqrt[3]{1.05}$

۱۴- 500.322 کا ساتواں جذر دریافت کرو

معلوم ہے لوک $500.322 = 7.7092388$

۱۵- معلوم ہے لوک $252894883 = 19.258225$

(۳۹۵۲) کا گیارہواں جذر دریافت کرو۔

۱۶- 34520.3 ' 35420.3 ' 36420.3 اور 37420.3 کا

حاصل ضرب دریافت کرو۔

معلوم ہے لوک $15560.5680 = 34520.3$

اور لوک $452823120 = 1915931$

۱۷- لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

لوک $\sqrt[3]{\left(\frac{25 \times 23}{18}\right)}$ دریافت کرو

۱۸- لوک ۲ اور لوک ۳ معلوم ہیں

لوک $(\sqrt[3]{28} \times 1.08 \div \sqrt[3]{9})$ دریافت کرو

۱۹- چھ مرتبہ کے اعشاریہ تک $\sqrt[3]{\left(\frac{125 \times 293}{32 \times 32}\right)}$ کی قیمت

دریافت کرو

معلوم ہیں لوک ۲ ' لوک ۳ ' لوک ۷

اور لوک $354569.03 = 9.645224$

۲۰۔ چھ مرتبہ کے اعشاریہ تک $(۳۳۰ \div ۳۹) \div ۳ \times ۲۲ = ۷۰$ کی قیمت دریافت کرو۔

معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳، لوک ۷، نیز لوک ۱۱ = ۱۵۰۴۱۳۹۲۷ اور لوک ۱۵۱۶، ۱۷۸۱۳ = ۳۵۰۷۶۵۱

۲۱۔ عدد ۳×۲ میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو

۲۲۔ ثابت کرو کہ $(\frac{۲۱}{۲})^{۱۰۰}$ بڑا ہے ۱۰۰ سے۔

۲۳۔ عدد $(\frac{۱}{۲})^{۱۰۰}$ میں علامت اعشاریہ اور پہلے ملحوظ ہندسے کے درمیان کل صفروں کی تعداد دریافت کرو

مفصلہ ذیل مساواتوں کو حل کرو معلوم ہیں لوک ۲، لوک ۳ اور لوک ۷

$$۲۴ - ۳ = ۲ - ۵ \quad ۵ = ۲ - ۵ \quad ۲۵ - ۵ = ۱۰$$

$$۲۶ - ۲ = ۲ + ۵ \quad ۲۷ - ۲ = ۱ + ۲ \quad ۵ \times ۲ = ۱ + ۲$$

$$۲۸ - ۲ = ۲ - ۵ \quad ۲۹ - ۲ = ۱ - ۷$$

$$\begin{cases} ۲۹ - ۲ = ۱ + ۲ \\ ۱ + ۲ \times ۳ = ۳ \end{cases}$$

$$۳۰ - ۳ = ۱ - ۷ \quad ۳۱ - ۳ = ۱ - ۷$$

$$۳۲ - ۳ = ۱ - ۷$$

۳۱۔ معلوم ہے لوک ۲، $۳۰۱۰۳ = ۲$ ، لوک ۲۰۰، دریافت کرو

۳۲۔ معلوم ہے لوک ۲، $۳۰۱۰۳ = ۲$ ، اور لوک ۷، $۵۸۴۵۰۹ = ۷$

لوک ۴ اور لوک ۷ دریافت کرو

(ب)

مفصلہ ذیل اعداد کے عکسی لوکارتم دریافت کرو۔

- ۱ - ۳۸۵۱ - ۲ - ۱۳۸۵۱ - ۳ - ۲۳۸۵۱
 ۴ - ۴۳۸۵۱ - ۵ - ۳۳۸۵۱ - ۶ - ۱۴۳۸۵۱
 ۷ - ۲۴۳۸۵۱ - ۸ - ۳۴۳۸۵۱ - ۹ - ۱۵۴۳۸۵۱
 ۱۰ - ۴۵۴۳۸۵۱ - ۱۱ - ۵۵۴۳۸۵۱ - ۱۲ - ۱۶۵۴۳۸۵۱

۱۳ - ۱۷۵۴۳۸۵۱ - ۱۴ - ۱۸۵۴۳۸۵۱

۱۵ - مساوات $۳^{۴۷} = ۳۰۵$ کو حل کرو۔

۱۶ - حل کرو $۳^x = ۱۰۰$ ، $۳^y = ۵۰$

۱۷ - $۳ = ۳$ کا خط منحنی $۳ = ۰$ سے $۳ = ۱$ تک منقسم کرو اور

فصلہ کی اکائی کو ایک انچ اور معین کی اکائی کو $\frac{1}{2}$ انچ فرض کرو،

اس طرح سے ۳ کا ۳ اور ۳ کی قیمتیں دریافت کرو، نیز

لوگ ۳ اور لوگ ۳ دریافت کرو۔

مفصلہ ذیل کی تقریبی قیمت چار ہندسوں والے لوکارتمی جدولوں سے

دریافت کرو۔

۱۸ - $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1.01) \times 9.345 \right\} - 19$

۲۰ - $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1.01) \times 9.345 \right\} - 21$

۲۱ - اگر $\pi = 3.14159$ تو $\frac{1}{\pi}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۲۲۔ تین مرتبہ کے اعشاریہ تک $\frac{۳۵۶۳}{۱۱۲}$ کی قیمت دریافت کرو۔

۲۳- ۱۲۳۳ء۔ ۶۰۶ھ اور ۱۵ کا چوتھا تناسب دریافت کرو جس کی قیمت دو ملحوظ ہندسوں تک بائبل درست ہو۔

۴۴۔ ثابت کرو کہ لوک، $(\frac{y}{x}) = \text{لوک، لا۔ ی}$

۲۵۔ اگر $\lambda = \text{لوکس}$ ۱ تو λ^2 کا لوکارتم اساس ج پر دریافت کرو۔



باب شانزدہم

سلسلہ قوت نما اور لوکارتمی سلسلے

۲۴۲۔ گزشتہ باب میں ہم نے یہ ذکر کیا تھا کہ مروج لوکارتم براہ راست نہیں نکالے جاتے لیکن پہلے وہ ایک خاص اساس پر نکالے جاتے ہیں اور اس کے بعد اساس دس میں منتقل کر دئے جاتے ہیں۔ اس باب میں ہم چند قوانین جبریہ جن کو قوت نمائی اور لوکارتمی سلسلے کہتے ہیں ثابت کریں گے اور مختصر طور پر یہ بیان کریں گے کہ ان کی مدد سے لوکارتمی جدولیں کس طرح مرتب ہوتی ہیں۔

۲۴۳۔ لاکو لاکو کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ اگر ن ایک سے بڑا ہو تو مسئلہ شنائی کی مدد سے

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \dots \\ & = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \dots \end{aligned}$$

لا کو ایک کے مساوی رکھنے سے

$$(۲) \dots\dots\dots + \frac{(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-1)}{3} + \frac{\frac{1}{3}-1}{2} + 1 + 1 = {}^n(\frac{1}{3}+1)$$

$$\text{لیکن } \{({}^n(\frac{1}{3}+1))\} = {}^n(\frac{1}{3}+1)$$

اسلئے معلوم ہوا کہ سلسلہ (۱) سلسلہ (۲) کی لاویں قوت ہے۔ یعنی

$$\dots\dots\dots + \frac{(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-1)}{3} + \frac{(\frac{1}{3}-1)}{2} + 1 + 1$$

$$= \{ \dots\dots\dots + \frac{(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-1)}{3} + \frac{\frac{1}{3}-1}{2} + 1 + 1 \}$$

اور یہ درست ہے خواہ ن کی کچھ ہی قیمت ہو، اسلئے اگر ن کو لامتناہی بڑھایا جائے تو

$$\dots\dots\dots + \frac{{}^n\frac{1}{3}}{3} + \frac{{}^n\frac{1}{3}}{2} + \frac{{}^n\frac{1}{3}}{2} + 1 + 1$$

$$= (\dots\dots\dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1)$$

ہم سلسلہ ۱ + ۱ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ کو قوت نما کے پہلے دو

حروف ”قو“ یا اختصار کی خاطر نقطے گرا کر ”قو“ سے تعبیر کریں گے

$$\text{اسلئے نو} = 1 + 1 + \frac{{}^n\frac{1}{3}}{2} + \frac{{}^n\frac{1}{3}}{3} + \dots\dots\dots$$

لا کی جگہ ج لکھنے سے

$$\text{قوت}^n = 1 + \text{ج لا} + \frac{\text{ج لا}^2}{2} + \frac{\text{ج لا}^3}{3} + \dots$$

اب فرض کرو کہ قوت = لا اسلئے ج = لوک لا، اوپر کے سلسلہ میں ج کی قیمت رکھنے سے

$$\text{لا}^n = 1 + \text{لا لوک لا} + \frac{\text{لا}^2 (\text{لوک لا})}{2} + \frac{\text{لا}^3 (\text{لوک لا})}{3} + \dots$$

اسکو مسئلہ قوت نما کہتے ہیں

نتیجہ صریح۔ جب ن لا انتہا بڑا ہو تو حد $(1 + \frac{1}{n})^n = \text{قوت}$ نیز جیسے اوپر عمل ہوا اُسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ن کو لا انتہا بڑایا جائے تو

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^4}{4} + \dots$$

یعنی جب ن غیر متناہی ہو تو حد $(1 + \frac{1}{n})^n = \text{قوت}$ اگر $\frac{1}{n}$ کی جگہ $(-\frac{1}{m})$ رکھا جائے تو

$$(1 - \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{m})^{-m} = \left[(1 + \frac{1}{m})^m \right]^{-1}$$

اب م غیر متناہی ہوتا ہے جب ن غیر متناہی ہو

$$\text{پس حد } (1 - \frac{1}{n})^n = \text{قوت}^{-1}$$

$$\text{اسلئے حد } (1 - \frac{1}{n})^n = \text{قوت}^{-1}$$

۲۴۴۔ دفعہ گزشتہ میں لا کی قیمت پر کوئی قید نہیں رکھی گئی۔ نیز چونکہ

۱/ ایک سے کم ہے اسلئے جو تفصیلی صورتیں ہم نے اوپر استعمال کی ہیں اور ان سے جو نتائج اخذ کئے ہیں وہ بلحاظ حسابی قیمت کے درست اور بامعنی ہیں

لیکن گزشتہ ثبوت میں ایک بات قابل غور ہے۔ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ جب ن غیر متناہی ہو تو

لا (لا- $\frac{1}{6}$) (لا- $\frac{2}{6}$) (لا- $\frac{5}{6}$) کی حد کی تمام قیمتوں کے لئے

اگر $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ کو صفر سے تعبیر کریں تو

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r} = \frac{r-n}{nr}$$

چونکہ غیر متناہی ہے اس لئے $\frac{\text{صدر}}{\text{صدر}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ یعنی $\text{صدر} = \frac{\text{لا}}{\text{ر}} \times \text{صدر}$ ۔

ظاہر ہے کہ صبیہ کی حد $\frac{1}{2}$ ہے، اس لئے صبیہ کی حد $\frac{3}{4}$ ہے اور صبیہ کی $\frac{1}{4}$ اور باہیوم صبیہ کی $\frac{1}{4}$ ۔

۲۴۵۔ مسئلہ قتل ناماکا ثبوت (صفحہ ۲۴۳) بعض بعض جگہ نامکمل ہے۔ مفصلہ ذیل قابل ترجیح ہے۔

فرض کرو کہ ج (م) = $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} + \dots$ (۱)

مثب ج(ن) = ۱ + $\frac{ن}{۱}$ + + $\frac{ن}{\frac{ن}{۲}}$ + + $\frac{ن}{۱}$ (۲)

بائیں طرف کے دونوں سلسلے م اور ن کی کل محدود قیمتوں کے لئے مستحق ہیں۔ اسلئے حاصل ضرب ج (م) × ج (ن) جملات (۱) اور (۲) کے بائیں طرف کے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے دریافت ہو سکتا ہے۔

اب ان سلسلوں کے حاصل ضرب میں درجہ کی ارقام

$$= \frac{م}{۱} + \frac{م-۱}{۱} + \frac{م-۲}{۲} + \frac{م-۳}{۳} + \dots + \frac{ن}{ن}$$

$$= \frac{۱}{۱} \{ م + م-۱ + م-۲ + \dots + ن \}$$

$$= \frac{۱}{۱} (م + ن) = \text{درجہ کی رقم ج (م + ن) میں}$$

کسی اور درجہ کی رقموں میں بھی اس قسم کا ربط ہوگا اسلئے م اور ن کی سب قیمتوں کے لئے

$$\text{ج (م) } \times \text{ ج (ن) } = \text{ج (م + ن)} \dots \dots \dots (۳)$$

اس لئے (۳) کی مدد سے

$$\text{ج (م) } \times \text{ ج (ن) } \times \text{ ج (ف) } = \text{ج (م + ن + ف)} \text{ اور علیٰ ہذا تقیاس}$$

$$\text{ج (م) } \times \text{ ج (ن) } \times \text{ ج (ف) } \times \dots = \text{ج (م + ن + ف + \dots)} \dots \dots (۴)$$

نیز (۴) سے

$$\text{ج (۱) } \times \text{ ج (۱) } \times \text{ ج (۱) } \times \dots = \text{ج (۱ + ۱ + ۱ + \dots تا قوتوں تک)}$$

$$\text{یعنی } \{ \text{ج (۱)} \}^۴ = \text{ج (۴)}$$

جہاں لامثبت صحیح ہے۔

$$\text{نیز ج (۱)} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots \infty \text{ تک}$$

ہم ابھی ثابت کریں گے کہ ج (۱) عدد غیر ناطق ۲۵۶۱۸۲۸۱۸۲۸۳۵۹ ہے۔

اسکو ”قو“ یا اختصاراً ”و“ سے تعبیر کرو، اس لئے اگر لامثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{قو} = \text{ج (۱)} = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots$$

اس سے مسئلہ مثبت صحیح قوت نا کی صورت میں ثابت ہوا

اگر قوت نا ایک مثبت کسر ہو تو اس صورت میں فرض کرو کہ لا = $\frac{۵}{۳}$

جہاں ۵ اور ۳ دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

$$\text{تب } \{ \text{ج (۱)} \}^{\text{ک}} = \{ \text{ج (۵)} \}^{\text{ک}} = \{ \text{ج (۳)} \}^{\text{ک}} \times \text{ج (۵)} \times \text{ج (۳)} \times \dots \text{ ک اجزاء ضربی تک}$$

$$= \text{ج (۵)} + \text{ج (۳)} + \text{ج (۵)} + \dots \text{ ک ضربی تک}$$

$$\text{ج (۵)} = \text{قو}$$

طرفین کا ک واں جذری بنے سے

$$\text{ج (۱)} = \text{قو}^{\frac{۱}{۵}} = \text{قو}$$

$$۱ = \text{قو} = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \dots$$

اخیر میں اگر لامنفی ہو تو فرض کرو کہ لا = -۔ مابہاں مامثبت ہے

نتیجہ (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ج (-۱)} \times \text{ج (-۱)} = \text{ج (-۱+۱)} = \text{ج (۰)} = ۱$$

$$\text{اس لئے ج (۱۰) = } \frac{1}{(10)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\text{یعنی } 0.1 = \text{ج (۱۰)} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \text{ لاکھائی قیموں کے لئے}$$

نتیجہ صریح۔ فرض کرو کہ $0.1 = 1$ تب طرفین کا لوکارتم اساس ۱۰ پر لینے سے $1 = 10$ لاکھ ۱۰

$$1 \text{ سلسلے } 1 = 10 \text{ لاکھ } 1 = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \text{ لاکھ (لوک ۱۰) } \frac{1}{100} + \dots$$

۴۴۴۔ لاکھ کل محدود قیمتوں کے لئے 0.1 کی صورت تفصیلی مستحق ہے اگر صدر سے 10 رقم تعبیر کیجاوے تو

$$\frac{10}{100} = \frac{10}{100} \times \frac{10^{10}}{10} = \frac{10^{10}}{10}$$

اب رقم اول کے بعد کل ارتقام کے لئے جن میں 10 تعداداً 10 سے بڑا ہو جاتا ہے یہ نسبت ایک سے کم ہے۔
اس سے معلوم ہوا کہ سلسلہ مستحق ہے۔

۴۴۵۔ سلسلہ جو 0.1 سے تعبیر ہوتا ہے مستحق ہے اور اس کی قیمت کا اندازہ چند مرتبہ کے اعشاریہ تک باسانی ہو سکتا ہے۔ یہ حساب لگانا آسان ہے کیونکہ $(10 + 1)$ میں رقم 10 میں رقم 10 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$1 = \text{پہلی رقم}$$

$$1 = \text{دوسری رقم}$$

$$0.5 = \text{تیسری رقم} = 2 \div 4$$

$$\begin{aligned}
 ۰.۱۶۶۶۶۶۶۶..... &= ۳ \div \text{تیسری رقم} = \text{چوتھی رقم} \\
 ۰.۵۰۴۱۶۶۶۶..... &= ۴ \div \text{چوتھی رقم} = \text{پانچویں رقم} \\
 ۰.۵۰۰۸۳۳۳۳..... &= ۵ \div \text{پانچویں رقم} = \text{چھٹی رقم} \\
 ۰.۵۰۰۱۳۸۸۸..... &= ۶ \div \text{چھٹی رقم} = \text{ساتویں رقم} \\
 ۰.۵۰۰۰۱۹۸۴..... &= ۷ \div \text{ساتویں رقم} = \text{آٹھویں رقم} \\
 ۰.۵۰۰۰۰۲۴۸..... &= \text{نویں رقم} \\
 ۰.۵۰۰۰۰۰۲۷..... &= \text{دسویں رقم} \\
 ۰.۵۰۰۰۰۰۰۲..... &= \text{گیارہویں رقم}
 \end{aligned}$$

اسلئے جمع کرنے سے $۲۵۷۱۸۲۸..... = \text{فو}$

مقدار و بڑی کارآمد ہے۔ اس کو اساس مقرر کرنے سے اعداد کے لوکارتموں کا سلسلوں کے ذریعہ سے حساب لگ سکتا ہے اور اسکے بعد یہ لوکارتم مروج لوکارتموں میں تبدیل ہو سکتے ہیں جو لوکارتم اساس نو پر نکالے جائیں ان کو نیمپیری لوکارتم کہتے ہیں کیونکہ ان کو نیمپیر نے ایجاد کیا تھا۔ نیز ان کو طبعی لوکارتم بھی کہتے ہیں کیونکہ تحقیقات جبریہ میں سب سے اول اسی قسم کے لوکارتم قدرتی طور پر ذہن میں آتے ہیں۔

آئندہ یاد رہے کہ جب لوکارتم نظریات میں استعمال کئے جائیں تو ہمیشہ اساس و محذوف ہوتا ہے، اسی طرح عملی حسابات میں ہمیشہ اساس استعمال کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ سلسلہ غیر متناہی $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
اور $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ کے مساوی رکھنے سے

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 2 + \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\right)$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 2 + \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\right)$$

مثال ۲۔ $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ کی صورت تفصیلی میں لا کا سرور یافت کرے

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots}{1}$$

$$\left\{ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \right\} = \frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots}{1}$$

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots}{1} = \text{سر مطلوب}$$

$$\left\{ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \right\} = \frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots}{1}$$

۲۴۸۔ لوکارنی (لا) کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

بوجب دفعہ ۲۴۳

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

اس سلسلے میں لا کی جگہ ۱ + لا رکھنے سے

$$(1) \dots\dots\dots + \frac{\{ \text{لوکار} (1+لا) \}^2}{2} + \frac{\{ \text{لوکار} (1+لا) \}^3}{3} + \dots\dots\dots (1)$$

نیز مسئلہ ثنائی کی مدد سے اگر $لا > 1$ تو

$$(2) \dots\dots\dots + \frac{لا^2 (1-لا)(2-لا)}{3} + \frac{لا^3 (1-لا)(2-لا)(3-لا)}{4} + \dots\dots\dots (2)$$

اب (2) میں ما کا سر ہے

$$\dots\dots\dots + \frac{لا^2 (3-لا)(2-لا)(1-لا)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{لا^3 (2-لا)(1-لا)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{لا^4 (1-لا)}{2 \times 1} + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots + \frac{لا^2}{4} - \frac{لا^3}{3} + \frac{لا^4}{2} - \dots\dots\dots$$

اس کو مساوات (1) میں جو ما کا سر ہے اُسکے مساوی رکھنے سے

$$(3) \dots\dots\dots + \frac{لا^2}{4} - \frac{لا^3}{3} + \frac{لا^4}{2} - لا = \text{لوکار} (1+لا) \dots\dots\dots (3)$$

اس کو لوکار تہی سلسلہ کہتے ہیں

اگر سلسلہ (3) میں صفر سے دوں رقم تعبیر کریں تو $\frac{ص-ن}{1-ن} = \frac{ن-لا}{ن}$

(تعداداً) جس کی حد جب ن غیر متناہی ہو لا ہوگی۔ اسلئے اگر لا

ایک سے کم ہو تو سلسلہ مستحق ہوگا

اگر $لا = 1$ تو سلسلہ کی صورت ہوگی

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1$$

اور یہ سلسلہ مستحق ہے۔

اگر $لا = 1$ تو سلسلہ کی صورت ہوگی

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

اور یہ سلسلہ متع ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکار تم غیر متناہی اور منفی ہوتا ہے۔ اور یہی نتیجہ مساوات $0 = \infty$ سے بھی ظاہر ہے

مثال۔ اگر $\lambda > 1$ تو $\{ \text{لوک } (1+\lambda) \}$ کو λ کی صعودی قوتوں

میں پھیلاؤ۔

مندرجہ بالا نتائج (۱) اور (۲) میں λ کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ صورت تفصیلی

$$\text{جملہ } \frac{\lambda}{2 \times 1} (1-\lambda) + \frac{\lambda}{3 \times 2 \times 1} (1-\lambda)(2-\lambda) + \frac{\lambda}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + \dots$$

میں λ کے سر کی دو چند ہے۔

$$\text{یعنی جملہ } \frac{\lambda}{2 \times 1} (1-\lambda) + \frac{\lambda}{3 \times 2 \times 1} (1-\lambda)(2-\lambda) + \frac{\lambda}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + \dots$$

میں λ کے سر کی دو چند ہے۔

$$\{ \text{لوک } (1+\lambda) \} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right\}$$

۴۴۹۔ سوائے اس صورت کے جب λ بے انتہا چھوٹا ہو

لوک $(1+\lambda)$ کی صورت تفصیلی عملی حسابات میں اتنی مفید ثابت نہیں ہوتی لیکن اس سے اور سلسلے حاصل ہوتے ہیں جن کی مدد سے

لوکار تہی جدولیں آسانی مرتب ہو سکتی ہیں۔

$\frac{1}{n}$ لکھنے سے ہمیں لوک $\frac{1}{n}$ کی صورت تفصیلی

حاصل ہوگی اسلئے

$$\text{لوک } n, (1+n) - \text{لوک } n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \dots (1)$$

لا کی جگہ۔ (۱/۲) لکھنے سے ہمیں نوک، ۱-۲ حاصل ہوگا اس لئے مساوات کے دونوں طرف علامات بدل دینے سے

$$\text{لوکون} - \text{لوکون} (1-n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots (2)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$\text{لوک } (1+n) - \text{لوک } (1-n) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots\right)^2 = (3) \dots$$

مساوات (۳) میں فرض کرو کہ $n = 3$ ، اس طرح سے حاصل ہوگا
لوک ۴۔ لوک ۲ یعنی لوک ۲ اور حساب لگانے سے معلوم ہوگا کہ
لوک ۲ = ۱۸۷۶۱۴۳۱۹۵، جس سے لوک ۸ معلوم ہو سکتا ہے۔
نیز فرض کرو کہ $n = 9$ ہمیں حاصل ہوگا لوک ۱۰۔ لوک ۸ جس سے
لوک ۱۰ = ۹۰۸۵۰۲۵۳۰۲۵ ہوگا

نیپیری لوکارتموں کو عشری لوکارتموں میں منتقل کرنے کے لئے ہمیں

اول الذکر کو $\frac{1}{10}$ سے ضرب دینی پڑتی ہے، سو $\frac{1}{10}$ مرج

لو کہ تم کا معیاس یا مضروب معین کہلاتا ہے اور اس کی قیمت

یا ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

”محب“ سے تعبیر کریں گے۔

۲۵۰۔ اگر ہم مندرجہ بالا سلسلوں کو مب سے ضرب دیں تو

ہیں ایسے قوانین حاصل ہونگے جو مروج لوکارتوں کے حساب لگانے میں نہایت موزوں ثابت ہوتے ہیں مثلاً (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مب لوک } (ن+۱) - \text{مب لوک } ن = \frac{\text{مب}}{ن} - \frac{\text{مب}}{ن+۱} + \frac{\text{مب}}{ن+۲} - \dots$$

$$\text{یعنی لوک } (ن+۱) - \text{لوک } ن = \frac{\text{مب}}{ن} - \frac{\text{مب}}{ن+۱} + \frac{\text{مب}}{ن+۲} - \dots \quad (۱)$$

اسی طرح (۲) سے

$$\text{لوک } ن - \text{لوک } (ن-۱) = \frac{\text{مب}}{ن} + \frac{\text{مب}}{ن+۱} + \frac{\text{مب}}{ن+۲} + \dots \quad (۲)$$

اوپر کے نتائج سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل اعداد میں سے کسی ایک کا لوکارتم معلوم ہو تو دوسرے کا لوکارتم معلوم ہو سکتا ہے۔ اور اس طرح سے ایک لوکارتمی جدول مرتب ہو سکتی ہے۔

ظاہر ہے کہ اوپر کے قوانین کی ضرورت صرف مفرد اعداد کے لوکارتم نکالنے میں پڑتی ہے کیونکہ مرکب اعداد کے لوکارتم ان کے اجزاء ضربی کے لوکارتوں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

اگر کسی چھوٹے عدد مفرد کا لوکارتم نکالنا منظور ہو تو ہمیں براہ راست اس عدد کو ضابطہ (۱) یا (۲) میں نہیں رکھ دینا چاہیئے بلکہ ن کی ایک ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کرنی چاہیئے جس سے عمل تقسیم میں آسانی ہو اور علاوہ اس کے وہ قیمت ایسی ہو کہ چھوٹے

مفرد بطور جز ضربی کے ن ۱۴ یا ن ۱۵ میں شامل ہو اس طرح سے ہم لوک (ن+۱۴) یا لوک (ن-۱) دریافت کر سکتے ہیں اور اس سے عدد معلوم کا

لوکارتم حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال۔ معلوم ہے مب = ۴۴۴۲۹۴۴۸ + معلوم کرو لوک ۲ اور لوک ۳

ضابطہ (۲) میں رکھو $n = 10$ اس سے ہمیں لوک ۱۰ - لوک ۹ کی قیمت حاصل ہوگی پس

$$1-2 \text{ لوک } 3 = 444294448 + 502141462$$

$$+ 500010856 + 5000144645$$

$$+ 500000062 + 5000000848$$

$$+ 500000004$$

$$1-2 \text{ لوک } 3 = 444294448 + 502141462$$

$$+ 500010856 + 5000144645$$

(۱) میں رکھو $n = 80$ تو حاصل ہوگا لوک ۸۱ - لوک ۸۰ پس

$$3-3 \text{ لوک } 2 = 444294448 + 502141462$$

$$+ 500010856 + 5000144645$$

$$3-2 \text{ لوک } 3 = 444294448 + 502141462$$

$$+ 500010856 + 5000144645$$

اگلی دفعہ میں لوک (ن+۱) - لوک (ن) کے لئے ہم ایک اور سلسلہ دریافت کریں گے جو لوکارتی جدولوں کے مرتب کرنے میں بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۵۱۔ دفعہ ۲۴۸ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{لوک } (1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

لا کو (۱) میں تبدیل کرنے سے

$$\text{لوک } (۱) = ۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \dots$$

عل تفریق سے

$$\text{لوک } (۱) = \frac{۱}{۱-۱} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

فرض کرو کہ $\frac{۱}{۱-۱} = \frac{۱}{۱} = ۱$ جس سے $\frac{۱}{۱} = ۱$ اس طرح سے حاصل ہوگا

$$\text{لوک } (۱) = ۱ - \left\{ \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۱+۲} + \frac{۱}{۱+۳} + \dots \right\}$$

نوٹ - اس سلسلہ کی رقیں بڑی سرعت سے کم ہوتی ہیں لیکن بتقاد سلسلہ ہائے دفعہ ۲۴۹ علی حسابات میں یہ سلسلہ اتنا مفید ثابت نہیں ہوتا۔

۲۵۲ - مندرجہ ذیل مثالیں اس باب کے مضمون کی توضیح کے لئے حل کی گئی ہیں۔

$$\text{مثال ۱ - سلسلہ } ۱ - \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots$$

کو مختصر کرو۔

ظاہر ہے کہ سلسلہ مجوزہ $۱ - \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots$ کی صورت تفصیلی ہے جبکہ $۱ - \frac{۱}{۱} = ۰$ اسلئے سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۱} = ۰$

مثال ۲ - ایک سلسلہ غیر متناہی کی n دیں رقم $\frac{n}{n}$ ہے اس کا مجموعہ دریافت کرو۔

$$n \text{ دیں رقم } = \frac{n}{n} = \frac{n}{n-1} = \frac{1}{1-n} + \frac{n-1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{1-n} = \frac{n}{1-n}$$

$$\frac{2-n}{2-n} + \frac{3}{2-n} + \frac{1}{1-n} = \frac{1+n}{2-n} + \frac{1}{1-n} =$$

$$\frac{1}{3-n} + \frac{3}{2-n} + \frac{1}{1-n} =$$

$$\frac{1}{2-n} + \frac{3}{3-n} + \frac{1}{2-n} = \text{ویں رقم} \quad (1-n)$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \text{چوتھی رقم}$$

$$1 + \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \text{تیسری رقم}$$

$$3 + \frac{1}{1} = \text{دوسری رقم}$$

پہلی رقم = ۱
عمودی سطروں کو جمع کرنے اور ن کو لا انتہا بڑھانے سے

$$\text{سلسلہ} = ۵ + ۳ + ۲ + ۱ = ۵$$

مثال ۳۔ اگر عہ اور بہ مساوات لا + ب لا + ج = ۰ کی قیمتیں ہوں۔ تو ثابت کر دو کہ

$$\text{لوک (ا-ب لا+ج لا)} = \text{لوک (ا+عہ+بہ) لا} - \frac{\text{عہ+بہ لا}}{۲} + \frac{\text{عہ+بہ لا}}{۳} + \dots$$

$$\text{چونکہ عہ + بہ = } -\frac{۱}{۲} \text{، عہ بہ = } \frac{۱}{۲} \text{ اس لئے}$$

$$\text{ا-ب لا+ج لا} = \left\{ ۱ + (\text{عہ+بہ}) لا + \frac{\text{عہ+بہ لا}}{۲} \right\} = \left\{ ۱ + (\text{ا+عہ لا}) + (\text{ا+بہ لا}) \right\}$$

لوک (۱-ب لا+ج لا) = لوک ۱+ لوک (۱+ع لا) + لوک (۱+ب لا)
 = لوک ۱+ع لا - $\frac{ع^۲ لا^۲}{۲}$ + $\frac{ع^۳ لا^۳}{۳}$ - + ب لا - $\frac{ب^۲ لا^۲}{۲}$ + $\frac{ب^۳ لا^۳}{۳}$ -
 = لوک ۱+ (ع+ب) لا - $\frac{ع^۲+ب^۲}{۲}$ لا + $\frac{ع^۳+ب^۳}{۳}$ لا -
 مثال ۳۔ ثابت کرو کہ لوک (۱+لا+لا^۲) کی صورت تفصیلی میں
 لا کا سر (- $\frac{۲}{۳}$) ہے اگر ن تین کا ضعف ہو اور لا کا سر $\frac{۱}{۳}$
 ہے اگر ن تین کا ضعف نہ ہو۔

لوک (۱+لا+لا^۲) = لوک $\frac{۱-لا^۳}{۱-لا}$ = لوک (۱-لا^۳) - لوک (۱-لا)
 = - $\frac{لا^۳}{۳}$ - $\frac{لا^۲}{۲}$ - $\frac{لا}{۱}$ - + (لا + $\frac{لا}{۲}$ + $\frac{لا^۲}{۳}$ +)
 اگر ن تین کا ضعف ہو تو اسے ۳ سے تعبیر کرو، اس صورت
 میں پہلے سلسلے سے لا کا سر (- $\frac{۱}{۳}$) ہو گا اور دوسرے سلسلے
 سے $\frac{۱}{۳}$ یعنی سر مطلوب - $\frac{۳}{۳}$ + $\frac{۱}{۳}$ یعنی - $\frac{۲}{۳}$ ہو گا۔
 اگر ن تین کا ضعف نہ ہو تو پہلے سلسلے میں لا واقع نہیں ہو گا
 اس لئے اس صورت میں سر مطلوب $\frac{۱}{۳}$ ہو گا۔
 ۲۵۳۔ ثابت کرو کہ وہ مقدار متبائن ہے

اگر وہ متبائن نہ ہوں بشرط امکان فرض کرو کہ $\frac{۱}{۳}$ جہاں م

اور n مثبت صحیح عدد ہیں

$$تب \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

طرفین کو n میں ضرب دینے سے

$$m - n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$لیکن \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots$$

ایک کسر واجب ہے کیونکہ یہ $\frac{1}{n+1}$ سے بڑی ہے اور سلسلہ ہندسیہ

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)} + \dots$$

یعنی $\frac{1}{n}$ سے چھوٹی ہے اسلئے ایک صحیح عدد ایک صحیح اور کسر کے حاصل جمع کے برابر ہوا جو کہ باطل ہے۔ پس معلوم ہوا کہ فوق مقدار متبائن ہے

۳۰. مثلہ نمبری

$$۱ - ثابت کرو کہ \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right\} = ۱$$

$$۲ - سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ کی قیمت دریافت کرو$$

$$۳ - $\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} - \frac{1}{5 \times 6} + \dots$ کی قیمت دریافت کرو$$

$$۴ - ثابت کرو کہ$$

$$\text{لوک } (1+n) - \text{لوک } (1-n) = (1+n)^2 = (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots)$$

$$-5 \quad \text{اگر } 1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \dots$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$-6 \quad \text{ثابت کرو کہ } \frac{1-b}{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-b}{1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1-b}{1} \right)^2 + \dots$$

$$= \text{لوک } 1 - \text{لوک } b$$

$$-7 \quad \text{سولہ مرتبہ کے اعشاریہ تک } \frac{1001}{999} \text{ کا نیپیری لوکارتم دریافت کرو}$$

$$-8 \quad \text{ثابت کرو کہ } 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right)^2$$

$$-9 \quad \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لوک } (1+a)^n - \text{لوک } (1-a)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1-a^3} + \dots \right)$$

$$-10 \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = \text{کی قیمت دریافت کرو}$$

$$-11 \quad 6, 11, 13 \text{ کے مروج لوکارتموں کی عددی قیمتیں دریافت کرو}$$

$$\text{ معلوم ہے } 828229223 = 2 \text{ اور لوک } 2 = 30.103 \dots$$

$$-12 \quad \text{ثابت کرو کہ اگر } \frac{1}{n} \text{ اور } \frac{1}{n+1} \text{ دونوں ایک سے کم ہوں تو}$$

$$\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) + \dots$$

$$= \text{لوک } \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots \right)$$

$$-13 \quad \text{ثابت کرو کہ لوک } (1+2+3+\dots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوکار} \frac{1+3}{1-1} = 5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \dots$$

اور سلسلہ کی رقم عامہ دریافت کرو۔

۱۵۔ $\frac{10^3 + 10^4}{10^3}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۱۶۔ $\frac{1}{2} (10^3 + 10^4)$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ

اس میں خ = ۱۰

۱۷۔ ثابت کرو کہ

لوکار (۱+۲) = ۲ لوکار (۱+۲) - لوکار

$$\left\{ \dots + \frac{1}{2(1+2)} + \frac{1}{2(1+2)} + \frac{1}{2(1+2)} \right\} -$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ $1 + \frac{1}{1} + \frac{1+2}{2} + \dots = \infty$ تک $\frac{3}{2}$

۱۹۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{2}$ لوکار $\frac{1-N}{1+N} + \frac{1}{3} \frac{1-N}{1+N} + \frac{1}{5} \frac{1-N}{1+N} + \dots$

۲۰۔ ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کے لوکارنتوں کا تفاوت

متواتر کم ہوتا ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ لوکار (۱+۲) + لوکار (۲-۱) - لوکار

$$= \left\{ \dots + \frac{1}{(1-2)^2} + \frac{1}{(1-2)^3} + \frac{1}{(1-2)^4} \right\} -$$

۲۲۔ اگر عدہ اور بہ مساوات لا۔ ف لا + ق =۔ کی قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } (1 + \text{ف لا + ق لا}) = (\text{عہ + بہ}) \text{ لا} - \frac{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}{2} \text{ لا} \\ + \frac{\text{عہ}^3 + \text{بہ}^3}{3} \text{ لا} - \dots$$

۲۳۔ اگر لا > ۱ تو سلسلہ $\frac{1}{1} \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ لا}^2 + \frac{1}{3} \text{ لا}^3 + \dots$ کا مجموعہ دریافت کرو۔
 ۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } (1 + \frac{1}{n})^n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3 \times 2} - \frac{1}{(n+1)^4 \times 3 \times 2}$$

۲۵۔ اگر لوک $\frac{1}{1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \dots}$ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلا دیا جائے جس میں قواہ بتدریج بڑھتی جائیں، تو ثابت کر کے لا کا سر۔ $\frac{1}{n}$ ہوگا اگر ن کی صورت ۴ م + ۲ ہو یا ن طاق عدد ہو اور لا کا سر $\frac{3}{2}$ ہوگا اگر ن کی صورت ۴ م ہو

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{5}{6}$$

۲۷۔ ثابت کرو کہ

$$2 \text{ لوک } n - \text{لوک } (n+1) - \text{لوک } (n-1) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$۲۸ - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2(1+n)^2} + \frac{1}{3(1+n)^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots$$

$$۲۹ - \text{اگر لوک } \frac{9}{16} = ۱ - \text{لوک } \frac{33}{25} = - \text{ب اور لوک } \frac{81}{80} = ج$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } ۲ = ۱۷ - ۲ - ب + ۳ + ج$$

$$\text{لوک } ۳ = ۱۱ - ۳ - ب + ۵ + ج$$

$$\text{لوک } ۵ = ۱۷ - ۵ - ب + ۷ + ج$$

اور لوک ۲، لوک ۳، لوک ۵ کو ۸ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو

جوابات

الذی یزکیہ

امثلہ نمبری ۱ (صفحات ۲۲-۲۶)

۲- $\frac{3}{5}$ سب سے بڑی، $\frac{4}{11}$ سب سے چھوٹی

۳- $3:2$ ۵- $23:13$

۴- (۱) ۵۴:ب:۱ (۲) ۷:۹ (۳) ب:لا:۱۱

۶- ۱۸ ۳ ۸- ۳۸۵، ۶۴۰، ۹- ۱۱

۱۰- $13:5$ ۱۱- $5:4$ یا $3:5$ ۱۲- ۱۴- ۴۰

۱۷- $\frac{11}{12} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

۲۴- ا ب س + ۲ ف گ ح - ۱ ف - ۲ ب گ - ۳ س ح = ۰

۲۲

۲۹- $1'3'3''$ ۳۰- $1'3'3''$

۳۱- $2'3'3''$ ۳۲- $1'3'3''$

۳۳- \pm (ب-ج) \pm (ج-ا) \pm (ا-ب)

۳۵۔ ب ج (ب-ج) 'ج ا (ج-ا) 'ا ب (ا-ب)

امثلہ نمبری ۲ (صفحات ۲۳-۴۷)

۱- ۴۵ ۲- (۱) ۱۲ (۲) ۳۰ آب

$$\lambda' \mu' = -1 \mu \quad \frac{\lambda' \delta'}{2} = -1 \mu \quad \frac{r_y}{(r_1 + r_2)_1} = -1$$

۱۵- $\frac{(ج+ب)}{ج-ب-۲۰}$ $\frac{۱۸}{۲۰}$

۲۱- ۱۵/۱۰/۹۴ ۲۰-۲۲- ۳ گیلین ۱ سے اور ۸ گیلین ب سے

۲۳- ۲۵ گیلن ۲۵- ۳:۱۴ ۲۶- ۳=۱ ب

۲۷۔ ۶۳ فیصدی لٹانا اور ۳۶ فیصدی جیت، ۵ حصے کا نئے کے ساتھ ۳ حصے پتیل کے لئے گئے ہیں۔

۲۸- ۶۳ یا ۱۲ منٹ

۱. مثله نمبری ۳ (صفحت ۶۵-۶۹)

$$\frac{1}{F} - P \qquad 9 - P \qquad \Delta \frac{1}{F} - 1$$

$$\frac{A}{B} - Ur = 1 - 9 \quad 4. - 6 \quad r - 7$$

$$\frac{r}{15} + 5 \frac{r}{15} = 11 - 1r \quad r = 11 \quad \frac{r}{15} + 11 = 11 - 1r$$

۱۴-۳۶ ۱۵-۱۶۱۰ فٹ ۳۰.۵۵ فٹ

۱۶- ۲۲ کعب فت ۱۷- ۳:۴

۱۸۔ "تقریباً ۶ دن رہی۔ چوتھے پانچویں چھٹے دن

۳۹ - ۱۴' ۹' ۴

۲۸ - ۶۱۲

۲۷ - ۵

۳۲ - ۱۶۰

۳۱ - ۴۹۵

۳۰ - ۱' ۴' ۷

۳۳ - $\frac{ع(۱+ع)}{۱۲} + ع ب ۳۴ - ن(۱+ن) - ۱ - \frac{ن}{۱}$

امثلہ نمبری ۵ (صفحات ۹۱-۹۴)

۱ - ۱۰ یا ۸ - ۲ - ۱۸ یا ۱۳ - ۳ - ۲' ۵' ۸

۳ - رقم اول ۸، تعداد ارقام ۵۹ - رقم اول $\frac{۱}{۲}$ ، تعداد ارقام ۵۳

۴ - قطبیں ۵۱ روپیہ، ۵۳ روپیہ، ۵۵ روپیہ

۷ - ۱۲ - ۸ - ۲۵

۹ - $\frac{ن}{(۱-۱)۲} (۲+ن-۳)$ - ۱۰ - ن

۱۳ - ۳' ۵' ۷ - ۱۴ - ۲' ۴' ۸ - ۱۵ - پ + ق - م

۱۶ - ۱۲ یا ۱۷ - ۱۷ - ۱۶ - ۲۰ - ۱۰ - پ - ۸

۲۱ - ۸ رقبے - سلسلے $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۱}{۴}$

۲۲ - (۳' ۵' ۷) اور (۴' ۵' ۶) - ۲۳ - ربا = (ن + ۱ - ر) لا

امثلہ نمبری ۶ (صفحات ۱۰۶-۱۰۸)

۱ - $\frac{۲۰۵۹}{۱۳۵۸}$ - ۲ - $\frac{۱۲۸۱}{۵۱۲}$ - ۳ - $\frac{۱}{۱۹۱}$

۴ - $\frac{۱}{(۵-۱)}$ - ۵ - $\frac{۱۰۹۳}{۳۵}$ - ۶ - ۶۸۲

$$(1+\sqrt{3})^{243} - 8 \quad \left\{ \sqrt[243]{\left(\frac{3}{2}\right)} - 1 \right\} \frac{9}{2} - 6$$

$$\frac{243}{192} - 10 \quad (243 - \sqrt{3} \cdot 585) \frac{1}{4} - 9$$

$$24 \dots \dots \dots 48 \cdot \frac{14}{3} - 12 \quad \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} - 11$$

$$\frac{43}{45} - 12 \quad \frac{6}{32} \dots \dots \dots \frac{6}{4} \cdot 4 - 13$$

$$\frac{1}{4} - 16 \quad 5999 - 14 \quad \frac{26}{58} - 15$$

$$\sqrt{3} \cdot 3 + 2 - 20 \quad (\sqrt{3} \cdot 3 + 4) 4 - 19 \quad \frac{(\sqrt{3} \cdot 3 + 3)^2}{4} - 18$$

$$2 - 23 \frac{\frac{2}{3}}{(5+3) \frac{1}{2}} - 22 (\sqrt{3} \cdot 3 + 2) \frac{1}{4} - 21$$

$$2 - 25 \dots \dots \dots 34 \cdot 22 \cdot 14 - 24$$

$$18 \cdot 4 \cdot 2 - 28 \quad 18 \cdot 12 \cdot 8 - 26 \quad 2 - 24$$

$$\dots \dots \dots 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 - 4 - 31$$

امثلہ نمبری ۷ (صفحات ۱۱۸-۱۲۱)

$$\frac{1}{2} - 2 \quad \frac{n}{d-1} - \frac{n-1}{d(d-1)} - 1$$

$$4 - 5 \quad \frac{n}{50p} - \frac{1}{50p} - 2 \quad - 2 \quad \frac{d+1}{d(d-1)} - 3$$

$$\frac{1}{(b-1)(d-1)} - 9 \quad \frac{1}{d(d-1)} - 4$$

$$\dots \dots \dots \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 11 \quad 10 \cdot 20 \cdot 30 - 10$$

$$۱۴ - ۲ + ۱۵۲ - ۲ + ۵۲ \times ۵$$

$$۱۵ - \frac{۱(۱-۵)}{۱-۵} + \frac{۵(۱+۵)}{۲}$$

$$۱۶ - \frac{۵(۱-۵)}{۱-۵} + \frac{۵(۱+۵)}{۱-۵}$$

$$۱۷ - \left(\frac{۱}{۲} - ۱\right) \frac{۲}{۳} + ۱^۲ \times ۳$$

$$۱۸ - \frac{۱}{۸} \quad ۱۹ - \frac{۲۳}{۳۸} \quad ۲۰ - \frac{۲۰}{۸} - (۱-۱) \frac{۲۰}{۸}$$

$$۲۱ - ۹۸۷۵۳۲۲ \quad ۲۲ - ۷۴۰۷۴۰۷۳۲$$

$$۲۳ - ۵ - \left\{ \frac{۱}{۵} - ۱ \right\} \frac{۱}{۵} - ۲۴ - \frac{۲}{۴} - (۱-۵) \frac{۲}{۴}$$

$$۲۵ - \frac{۳}{۴} - (۱-۵) \frac{۳}{۴} \quad ۲۶ - (۱-۵) \frac{۲}{۲}$$

$$۲۷ - ۲ + ۵ - (۱-۵) \frac{۲}{۲} + (۱-۵) \frac{۲}{۲}$$

$$۲۹ - \frac{(۱-۵)(۱+۱)}{۱-۵}$$

$$۳۰ - \frac{۱}{ب} - \left\{ \frac{ب(۱-۵)}{۱-۵} - ۵ \right\}$$

امثلة نمبری ۸ (صفحات ۱۳۶-۱۳۹)

$$۱ - ۱(۱) ۵(۲) ۳ \frac{۲}{۳} (۳) ۳ \frac{۲}{۳}$$

$$۲ - ۴ \frac{۲}{۲} ۴ \frac{۲}{۲} ۳ - ۲ \frac{۲}{۲} ۲ \frac{۲}{۲} ۲ \frac{۲}{۲} ۲ \frac{۲}{۲}$$

$$\begin{array}{lll} ۹ - ۱۵, ۱۲, ۱۰ & ۵ - ۹, ۳ & ۶ - ۲۴, ۱۰ \\ ۱۴ - ۱۰, ۳, ۲۳, ۴ & ۱۱ - ۵, ۳۵ & ۱۰ - ۳, ۱۲ \end{array}$$

امثله نمبری ۹ (نجات ۱۵۷-۱۶۱)

$$\begin{array}{ll} ۱ - ۲۹۱۵ & ۲ - \frac{n(n^2 + 3n - 1)}{4} \\ ۳ - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12} & ۴ - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \\ ۵ - \frac{n(n^2 + 3n - 1)}{4} & ۶ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ ۷ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & ۸ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ ۹ - ۷۳۰۵ & ۱۰ - ۱۹۵۰۰ \\ ۱۱ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & ۱۲ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ ۱۳ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & ۱۴ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ ۱۵ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & ۱۶ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ ۱۷ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & ۱۸ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ ۱۹ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} & ۲۰ - ۱۲۹۴۸۰ \\ ۲۱ - ۱۰۰۵۳۵۰ & ۲۲ - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12} \\ ۲۳ - \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} & ۲۴ - \frac{۷}{۱۰۵۹} \end{array}$$

$$۲۵ - \frac{۹۶۷}{۹۳۰} - ۲۴ - \frac{۷}{(۳۴+۷۳)۳} - ۲۶ - \frac{۷۳۷}{۲۵۵۰}$$

$$۲۸ - \frac{۷(۲+۷)}{(۳+۷۲)(۱+۷۲)۳} - ۲۹ - ۱۲۲۰$$

$$۳۰ - ۱۱۲۰ - ۳۱ - ۱۴۴۲۴ - ۳۲ - ۲۲۷۰$$

$$۳۳ - ۲۱۳۲۱ - ۳۴ - ۵۲ - ۳۵ - ۱۱۸۷۹$$

$$۳۶ - ۱۸۲۰ - ۳۷ - ۱۱۹۲۰ - ۳۸ - ۱۹۰$$

$$۳۹ - ۳۰ - ۱۸۲۹۹$$

$$۴۲ - \text{شش ۳۴۲، پنج ۲۹۰۰، ۴۳ - ۱۲۰}$$

$$۴۳ - ۱ - ۷$$

امثلة نمبری ۱۰ (صفحات ۱۸۱-۱۸۳)

$$۱ - \frac{۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۰}{۲}$$

$$۲ - \frac{۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱}{۱ - ۱}$$

$$۳ - \frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰}{۲}$$

$$۴ - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۲} + \frac{۴}{۲} \times \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} \times \frac{۴}{۲} + \frac{۶}{۲} \times \frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲} \times \frac{۶}{۲} + \frac{۸}{۲} \times \frac{۷}{۲} + \frac{۹}{۲} \times \frac{۸}{۲} + \frac{۱۰}{۲} \times \frac{۹}{۲}$$

$$۵ - \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۲} - \frac{۴}{۲} \times \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} \times \frac{۴}{۲} - \frac{۶}{۲} \times \frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲} \times \frac{۶}{۲} - \frac{۸}{۲} \times \frac{۷}{۲} + \frac{۹}{۲} \times \frac{۸}{۲} - \frac{۱۰}{۲} \times \frac{۹}{۲}$$

$$۶ - \frac{۱}{۲} - \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} \times \frac{۲}{۲} - \frac{۴}{۲} \times \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} \times \frac{۴}{۲} - \frac{۶}{۲} \times \frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲} \times \frac{۶}{۲} - \frac{۸}{۲} \times \frac{۷}{۲} + \frac{۹}{۲} \times \frac{۸}{۲} - \frac{۱۰}{۲} \times \frac{۹}{۲} + \frac{۱۱}{۲} \times \frac{۱۰}{۲} - \frac{۱۲}{۲} \times \frac{۱۱}{۲} + \frac{۱۳}{۲} \times \frac{۱۲}{۲} - \frac{۱۴}{۲} \times \frac{۱۳}{۲} + \frac{۱۵}{۲} \times \frac{۱۴}{۲} - \frac{۱۶}{۲} \times \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱۷}{۲} \times \frac{۱۶}{۲} - \frac{۱۸}{۲} \times \frac{۱۷}{۲} + \frac{۱۹}{۲} \times \frac{۱۸}{۲} - \frac{۲۰}{۲} \times \frac{۱۹}{۲}$$

$$1 + \frac{1}{r}r + \frac{r}{r} - 6$$

$$\frac{r}{r} - \frac{1}{r} \times r + \frac{1}{r} \times r - r - 8$$

$$\frac{r}{r} + \frac{1}{r}r \times \frac{1}{r} + \dots + \frac{r}{r}r \times \frac{r}{r} + \frac{1}{r}r \times \frac{r}{r} + \frac{r}{r} - 9$$

$$\frac{r}{r} \times \frac{1}{r}r - \frac{r}{r} \times \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \times r - \frac{r}{r} \times \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \times \frac{r}{r} - 12 - 10$$

$$r - \frac{r}{r}r + \frac{r}{r}r - 12 \quad \frac{\frac{1}{r}r + \frac{r}{r}r + \frac{r}{r}r}{1} - 11$$

$$\frac{r}{r}r + \frac{r}{r}r - 12 \quad \frac{r}{r}r + 1 - 13$$

$$\left(\frac{r}{r}r - \frac{r}{r}r\right) \frac{r}{r}r - 14 \quad \left(\frac{r}{r}r + \frac{1}{r}r\right) \frac{r}{r}r - 15$$

$$\frac{r}{r}r + 1 - 18 \quad \frac{r}{r}r - \frac{r}{r}r + 2 - 16$$

$$\frac{r}{r}r - r - 21 \quad \frac{r}{r}r - \frac{r}{r}r - 20 \quad \frac{r}{r}r + 1 - 19$$

$$\left(\frac{r-1}{r}r + \frac{r+1}{r}r\right) \frac{1}{r}r - 22 \quad \frac{r}{r}r - \frac{r}{r}r - 23$$

$$\frac{r}{r}r + 11 - 25 \frac{r+1-1}{r}r + \frac{r+1+1}{r}r - 22$$

$$r - 28 \quad \frac{r}{r}r - 26 \quad r + 9 - 24$$

$$5r + 4 - 2 = \frac{r}{r}r + r - 25 \quad 5r + 4 - 9 - 29$$

$$r = 0 - 33 \quad r = 0 - 32 \quad \frac{1-r}{r} - 31$$

$$\frac{r}{r} = 0 - 32$$

$$۳۵- \text{لا} = \frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{ا}^۲ \text{ب} - \text{ا}^۲ \text{ج} - \text{ب}^۲ \text{ج} - ۲ \text{ج}^۲}{\text{ج}^۲}$$

امثله نمبری ۱۱ (سنوات ۲۰۹-۲۰۶)

$$۱- ۱۳- ۲- ۲۰۶-۲۰۹- ۳- \text{لا}^۲ - \text{لا} - ۱$$

$$۴- ۱۹-۲۰۶- ۵- \frac{۱۲ \text{لا} \text{ا}^۲}{\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲} - ۶- \frac{۳ \text{ا}^۲ - ۱}{\text{ا}^۲}$$

$$۷- ۱۲- ۸- \pm (۵-۲۰۶-۱) - ۹- \pm (۱-۲۰۶-۱)$$

$$۱۰- \pm (۱-۲۰۶ + ۱) - ۱۱- \pm \{ (۱-۲۰۶) - (۱-۲۰۶) \}$$

$$۱۲- \frac{۲۰۶}{۱۳} - ۱۳- \text{خ}$$

$$۱۴- \frac{\text{ب}^۲ (۳ \text{ب}^۲ - \text{ب}^۲) \text{خ}}{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$$

$$۱۵- ۲ (۱-۲۰۶ + ۲۸ \text{ا}^۲ \text{ب}^۲ + ۷۰ \text{ا}^۲ \text{ب}^۲ - ۲۸ \text{ا}^۲ \text{ب}^۲ + \text{ب}^۴)$$

$$۱۶- \frac{۷}{۵} - ۱۷- ۸$$

$$۱۹- \text{لا}^۲ - ۶ \text{لا}^۲ + ۱۸ \text{لا}^۲ - ۲۶ \text{لا} + ۲۱ - ۲۲- \frac{۵}{۳۳}$$

امثله نمبری ۱۲ (سنوات ۲۲۲-۲۲۴)

$$۱- ۳۵ \text{لا}^۲ + ۱۳ \text{لا} - ۱۲ = ۲- \text{من لا}^۲ + (ن-۲) \text{لا} - \text{من} = ۰$$

$$۳- (ف-۲) \text{قی}^۲ + \text{لا}^۲ + ۴ \text{قی} - \text{لا} - \text{ف}^۲ + \text{قی}^۲ = ۰$$

$$۴- \text{لا}^۲ + ۲ \text{ف}^۲ + \text{لا} - \text{ف}^۲ - ۸ \text{قی} = ۰$$

امثلہ نمبری ۱۴۱ (صفحات ۲۳۴-۲۳۵)

٢- ١

هـ - (لَن - لَّن) = (لَمْ - لَم) (مَنْ - مَن)

۴- (ا-ب بَب) ۲ + (ه-ا ه_ا ه_ب) (ه_ب + ه_ب) =

۱۰۔ (بَب-۲-اَج-۲-اَج) = (بَب-۳-اَج) (بَب-۴-اَج) جس کی

مختصر صورت (ا ج - ا ج) = (ا ب - ا ب) (ب ج - ب ج) ہے

امثلہ نمبری ۱۵ (صفحات ۲۵۵-۲۵۷)

$$1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1 \quad 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1 \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1$$

۴- ۱۲۰۵ - ۵- ب' ج' و غیره ۶- ۱۲۰۶ -

$$\frac{b^2}{b^2 - 1} \left(\frac{b-1}{b+1} \right), \quad \frac{b^2}{b^2 - 1} \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \quad -6$$

$$1 \pm -1 \quad \frac{r' \cdot 9}{13} = 9 \quad \frac{r_2' \cdot r_2}{106} = 1$$

۱۱- ۴۰۰
۱۲- ۴۰۰

$$\sqrt{1 \pm 1} = \sqrt{2} = 1.414 \quad \sqrt{1 \pm 1} = \sqrt{2} = 1.414$$

$$\frac{\sqrt{45}h \pm 1}{r} \cdot \frac{c}{r} - r - 14 \quad \frac{\sqrt{45}h \pm 1}{r} \cdot \frac{r}{r} - r - 15$$

$$\sqrt{11} \sqrt{\frac{1}{p}} \pm \frac{11}{p} - \sqrt{129} \sqrt{\frac{1}{p}} \pm \frac{11}{p} - 12$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{138}h \pm 1}{3}, \frac{1}{3}, 5 - 19 \quad \frac{\sqrt{20}h \pm 2}{3}, \frac{5}{3}, 3 - 18 \\
 & \frac{\sqrt{150}h \pm 1}{4}, \frac{4}{3}, 5 - 21 \quad \frac{\sqrt{20}h \pm 5}{2}, \frac{1}{2}, 2 - 20 \\
 & \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - 23 \quad \frac{1}{5}, 1, 1 - 22 \\
 & 5, 5 - 24 \quad \frac{4}{3}, 2 - 25 \quad \frac{1}{4}, 5 - 27 \\
 & \frac{\sqrt{35}h \pm 1}{4}, \frac{1}{3}, 3 - 28 \quad \frac{5}{4}, 4 - 26 \\
 & \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{3}, 2 - 30 \quad \frac{\sqrt{2}h \pm 1}{2}, \sqrt{2}h \pm 2 - 29 \\
 & 1, \frac{\{\sqrt{2}h \pm 1\}}{\sqrt{2}} - 31 \\
 & 1, \frac{\{\sqrt{2}h \pm 1\}}{\sqrt{2}} - 32 \\
 & 1 \pm, \frac{\{\sqrt{2}h \pm 1\}}{\sqrt{2}} - 33 \\
 & \frac{\{\sqrt{2}h \pm 1\}}{\sqrt{2}} - 34 \\
 & \left\{ \frac{1}{18}, \text{و غیره} \right\} - 35 \\
 & \frac{1}{2} \pm - 36 \quad \frac{1}{2}, 3 - 37 \\
 & \frac{\sqrt{2}h \pm 1}{2}, \frac{\sqrt{2}h \pm 1}{2} - 38
 \end{aligned}$$

$$۳۱ - صفر، \frac{۱۶۳}{۶۵}$$

$$۳۰ - \frac{۲}{۳}، \frac{۳}{۴}$$

$$۳۲ - \frac{۲ + \sqrt{۲(۱-۱۱)}}{۲ - \sqrt{۲(۱+۱۱)}}$$

امثله نمبری ۱۶ (صفحات ۲۶۲-۲۶۴)

$$۱ - ۱۵ = ۶، ۸ = ۳ \text{ اور } ۱۵ = ۶، ۸ = ۳$$

$$۲ - ۹۴ = ۱۹، ۷ = ۱۹ \text{ اور } ۹۴ = ۱۹، ۷ = ۱۹$$

$$۳ - ۲۵ = ۲۲، ۱۱ = ۲۲ \text{ اور } ۲۵ = ۲۲، ۱۱ = ۲۲$$

$$۴ - ۵ \pm ۳، ۳ \pm ۵ \text{ اور } ۳ \pm ۳، ۳ \pm ۵$$

$$۵ - ۸ = ۲، ۲ = ۸ \text{ اور } ۲ = ۸، ۲ = ۸$$

$$۶ - ۴۵ = ۵، ۵ = ۴۵ \text{ اور } ۵ = ۴۵، ۵ = ۴۵$$

$$۷ - ۹ = ۳، ۳ = ۹ \text{ اور } ۳ = ۹، ۳ = ۹$$

$$۸ - ۱۵ \pm ۳، ۳ \pm ۱۵ \text{ اور } ۳ \pm ۱۵، ۳ \pm ۱۵$$

$$۹ - ۱۹ \pm ۳، ۳ \pm ۱۹ \text{ اور } ۳ \pm ۱۹، ۳ \pm ۱۹$$

$$۱۰ - ۱۱ \pm ۳، ۳ \pm ۱۱ \text{ اور } ۳ \pm ۱۱، ۳ \pm ۱۱$$

$$۱۱ - ۱۱ \pm ۳، ۳ \pm ۱۱ \text{ اور } ۳ \pm ۱۱، ۳ \pm ۱۱$$

$$۱۲ - ۱۹ \pm ۳، ۳ \pm ۱۹ \text{ اور } ۳ \pm ۱۹، ۳ \pm ۱۹$$

$$۱۳ - ۹۴ \pm ۳، ۳ \pm ۹۴ \text{ اور } ۳ \pm ۹۴، ۳ \pm ۹۴$$

$$۱۴ - ۱۵ \pm ۳، ۳ \pm ۱۵ \text{ اور } ۳ \pm ۱۵، ۳ \pm ۱۵$$

$$-15 \quad \sqrt{11} - \sqrt{11} \pm \sqrt{11} - \sqrt{11} = 0 \text{ اور } \sqrt{11} - \sqrt{11} = 0$$

$$-14 \quad \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0 \text{ اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0$$

$$-13 \quad \sqrt{1} = 0 \text{ اور } \sqrt{1} = 0$$

$$-12 \quad \sqrt{4} = 0 \text{ اور } \sqrt{4} = 0$$

$$-11 \quad \sqrt{9} = 0 \text{ اور } \sqrt{9} = 0$$

$$-10 \quad \sqrt{16} = 0 \text{ اور } \sqrt{16} = 0$$

$$-9 \quad \sqrt{25} = 0 \text{ اور } \sqrt{25} = 0$$

$$-8 \quad \sqrt{36} = 0 \text{ اور } \sqrt{36} = 0$$

$$-7 \quad \sqrt{49} = 0 \text{ اور } \sqrt{49} = 0$$

$$-6 \quad \sqrt{64} = 0 \text{ اور } \sqrt{64} = 0$$

$$-5 \quad \sqrt{81} = 0 \text{ اور } \sqrt{81} = 0$$

$$-4 \quad \sqrt{100} = 0 \text{ اور } \sqrt{100} = 0$$

$$-3 \quad \sqrt{121} = 0 \text{ اور } \sqrt{121} = 0$$

$$-2 \quad \sqrt{144} = 0 \text{ اور } \sqrt{144} = 0$$

$$-1 \quad \sqrt{169} = 0 \text{ اور } \sqrt{169} = 0$$

$$0 \quad \sqrt{196} = 0 \text{ اور } \sqrt{196} = 0$$

$$1 \quad \sqrt{225} = 0 \text{ اور } \sqrt{225} = 0$$

$$۳۳ - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 1 \text{ اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 2 = 6$$

$$۳۵ - \frac{1}{18} \sqrt{18} \pm 3 = 6 \text{ اور } \frac{1}{18} \sqrt{18} \pm 3 = 1$$

$$۳۶ - 2 \pm 1 = 1$$

$$۳۷ - \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{2} + 1} = 1 \text{ اور } \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{2} - 1}$$

$$\text{اور } \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{2} + 1} = 6$$

$$۳۸ - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6 \text{ اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6$$

$$۳۹ - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6 \text{ اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6$$

$$۴۰ - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6 \text{ اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6$$

$$\text{اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6$$

$$۴۱ - \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6$$

$$\text{اور } \frac{1}{2} \sqrt{2} \pm 1 = 6$$

امثلہ نمبری ۱۷ (صفحات ۲۹۷-۲۹۸)

$$۱ - 2 \pm 1 = 6, 3 \pm 1 = 5, 4 \pm 1 = 5$$

$C = G, I = b, A = U. -P$

۳۔ لا ۵-۱ اور ۶=۱-۵ اور ۷=۲

۴۔ $n=1$ اور $m=6$ اور $m=5$ اور $n=7$

$$\frac{|\Delta|}{\mu} \mp 2, \mu' \mu = 6 \quad \text{or} \quad \frac{|\Delta|}{\mu} \pm 2, \mu' \mu = 6 \quad -D$$

اور $y = 2 - \frac{11}{3}$

$$a \pm = 5, \quad r \mp = 6, \quad s \pm = 11 \quad -4$$

۱±=۵ ' ۱±=۶' ۵±=۷ -۶

۸۔ لا = ۸، اور ما = ۵، اور ی = ۳، ۳۔

9- $\frac{1}{x}=9$, $\frac{1}{y}=5$, $x=6$, $y=11$

۱۰- لا=۱ ، ب=۲ ، ی=۳

۱۱۔ لا = ۵، ۷ اور ۸ = ۳، ۵ اور ۶ = ۴

۱۲۔ ل=۱، ۲۔ اور ۱=۲، ۳۔ اور ۱=۳، ۴۔ اور ۱=۴

۱۳- $\frac{4}{x}$ ، $x=6$ اور $\frac{44}{x}$ ، اور $x=5$ ۔

۱۴۔ لا = لا، صفر، صفر اور ما = صفر، لا، صفر اور ی = صفر، صفر، لا

$$\frac{1}{9} \frac{9 - h \pm \sqrt{h}}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} = 0 \quad -15$$

$$1. \frac{9-r \pm \sqrt{r^2-6}}{4} = \frac{1}{\sqrt{r}} = 6$$

$$1) \frac{\sqrt{4} \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{2 \pm 1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$۱۴ - ۱۵ = ۱ \quad ۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

امثله نمبری ۱۸ (سفات ۲۹۴-۳۰۱)

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

$$۱۵ - ۱۶ = ۱ \quad ۱۶ - ۱۷ = ۱ \quad ۱۷ - ۱۸ = ۱ \quad ۱۸ - ۱۹ = ۱ \quad ۱۹ - ۲۰ = ۱$$

امثلة نمبری ۲۱ (صفحات ۳۵۰-۳۵۱)

- ۱- $۲۴۳ - ۵۰۰ + ۲۰۰ - ۹۰ + ۱۵$
- ۲- $۸۱ - ۲۱۴ + ۲۱۴ - ۹۴ + ۱۴$
- ۳- $۳۲ - ۸۰ + ۸۰ - ۱۰ + ۱۰$
- ۴- $۱۸ - ۱۳۵ + ۱۳۵ - ۱۲۱ + ۱۲۱ - ۲۹ + ۲۹$
- ۵- $۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۵$
- ۶- $۱ - ۲۱ + ۲۱ - ۳۵ + ۳۵ - ۲۱ + ۲۱ - ۱$
- ۷- $۱۴ - ۴۸ + ۵۴ - ۲۰ + ۱۱$
- ۸- $۲۹ - ۹۲ + ۵۴ - ۱۴ + ۸۰ - ۴۴ + ۲۹$
- ۹- $۱ + \frac{۲۱}{۲} + \frac{۲۱}{۴} + \frac{۳۵}{۱۴} + \frac{۳۵}{۸} + \frac{۲۱}{۴} + \frac{۲۱}{۲}$
- ۱۰- $\frac{۲۹}{۲۴} + \frac{۲۴}{۲۸} - \frac{۱۳۵}{۲۸} + ۲۰ - \frac{۲۰}{۳} + \frac{۳۲}{۲۰} - \frac{۴۴}{۲۹}$
- ۱۱- $۱ + \frac{۱}{۲۵۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۴}$
- ۱۲- $۱ - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} - \frac{۲۵}{۵} + \frac{۱۲}{۵} - \frac{۲۵}{۵} + \frac{۲۵}{۵} - \frac{۲۱}{۵} + \frac{۱۲}{۵} - \frac{۲۵}{۵} + \frac{۱}{۵}$
- ۱۳- $۳۵۰ - ۱۱۲۴$
- ۱۴- $۳۱۲ - ۳۱$
- ۱۵- $۳۱ - ۱۱۲۴$
- ۱۶- $۱۱۲۴ - ۳۱$

$$\frac{۱۰۵۰۰}{۷} - ۲۰ \quad - ۲۱ \quad \frac{۱۰۵۰۰}{۷} - ۲۰$$

$$۸ + ۲۲۲ + ۲۲ - ۲۲$$

$$(۲۵ + ۲۲ - ۱۴) ۲ - ۲۳$$

$$۲۱۰ - ۲۴$$

$$(۲۵ - ۲۲ + ۲۲ - ۲۵) ۲ - ۲۵$$

$$\frac{۲۲۹}{۱۴} - ۲۶ \quad ۲۵۲ - ۲۴$$

$$\frac{۲۱}{۱۴} - ۱۹ \quad \frac{۱۸۹}{۸} - ۲۸$$

$$۳۸۲ - ۳۰ \quad ۱۱۰۵۶۵ - ۲۹$$

$$۱۸۵۶۲ - ۳۲ \quad ۱۳۶۵ - ۳۱$$

$$\frac{۱}{۲} (ن - ر) \quad - ۳۳ \quad \frac{۱}{۲} (ن + ر)$$

$$\frac{۶}{۱۸} - ۳۳$$

$$\frac{۲۲}{۳} \quad - ۳۵ \quad \frac{۲۲}{۳}$$

اشکله نمبرى ۲۲ (صفحات ۳۶۶-۳۶۷)

$$۳۹۲ - ۳ \quad ۴ - ۲ \quad ۱۳۲ - ۱$$

$$۱۵۰۰۴ - ۶ \quad ۱۵۱۰ - ۴ \quad ۵۸۳ - ۴$$

$$۱۰ - ۱۰ \quad ۱۵۰۰۳۵۰۵ - ۹ \quad ۱۵۰۱۲۰۴ - ۸$$

امثله نمبری ۲۲ (سفره ۲۸۸-۲۹۰)

$$-۱ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + ۱ \quad -۲ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}} - \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + ۱$$

$$-۳ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}} - \sqrt[3]{\frac{3}{8}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱ \quad -۴ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}} - \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱$$

$$-۵ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - ۱ \quad -۶ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱$$

$$-۷ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱ \quad -۸ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱$$

$$-۹ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + ۱ \quad -۱۰ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱$$

$$-۱۱ \quad \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} - ۱ \right) \frac{1}{8}$$

$$-۱۲ \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{14}} + \sqrt[3]{\frac{1}{14}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + ۱ \right) ۳$$

$$-۱۳ \quad \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + ۱ \right) ۴$$

$$-۱۴ \quad \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{5}{4}} + \sqrt[3]{\frac{5}{4}} + ۱ \right) \frac{1}{12}$$

$$-۱۵ \quad \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \times \frac{5}{4} + \frac{\sqrt[3]{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} \times \frac{3}{4} + \frac{\sqrt[3]{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + ۱ \right) \frac{1}{14}$$

$$-۱۶ \quad \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \quad -۱۷ \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$-۱۸ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}} \quad -۱۹ \quad \sqrt[3]{\frac{1}{14}}$$

$$-۲۰ \quad \sqrt[3]{(1+3)} \quad -۲۱ \quad \frac{\sqrt[3]{(3+3)(3+3)(1+3)}}{3 \times 2 \times 1}$$

$$۲۲ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۳-۲)}{۲!}$$

$$۲۳ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۳-۲)}{۳!}$$

$$۲۵ - \frac{۱۹.۶۱۲}{۳}$$

$$۲۴ - ۱۸.۴۸$$

$$۲۸ - (۱+۲)(۳+۲)$$

$$۲۶ - ۱+۲$$

$$۳۰ - \text{تمام سوائے دو کے}$$

$$۲۹ - \text{چوتھی}$$

$$۳۱ - ۱ - ۵ + ۵ - ۲۵ + \dots$$

$$\text{اور } \frac{۱}{۵} - \left(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۵} + \dots \right)$$

۲۵ نمبری (صفحات ۴۰۰-۴۲)

$$۱ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۱-۲)}{۲!}$$

$$۲ - \frac{(۱+۲)(۲+۲)(۳+۲)(۴+۲)}{۳!}$$

$$۳ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۳-۲)}{۲!}$$

$$۴ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۱-۳)}{۳!}$$

$$۲۲ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۳-۱۲)}{۲!} \times ۱۱$$

$$۲۳ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۳-۱۳)}{۳!} \times ۱۱$$

$$۲۵ - \frac{۱۹۶۱۲}{۳} \times ۱۱$$

$$۲۴ - ۱۸۴۸ \times ۱۱$$

$$۲۸ - (۳+۲)(۱+۲)$$

$$۲۶ - ۱+۲$$

$$۳۰ - \text{تمام سوائے دو کے}$$

$$۲۹ - \text{چوتھی}$$

$$۳۱ - ۱ - ۵ + ۵! - \dots$$

$$\text{اور } \frac{۱}{۵} (۱ - \frac{۱}{۵!} + \frac{۱}{۵!} - \dots)$$

امثلہ نمبری ۲۵ (صفحات ۲۰۰-۲۰۲)

$$۱ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۱-۲)}{۲!}$$

$$۲ - \frac{(۱+۲)(۲+۲)(۳+۲)(۴+۲)}{۳!}$$

$$۳ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۳-۱۳)}{۳!}$$

$$۴ - (۱-) \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۱-۳)}{۳!}$$

$$\begin{aligned}
 & ۵- \frac{(1-3) \times (1+3) \times (2+3)}{2} \\
 & ۶- \frac{(1+3) \times 4 \times 5 \times 3}{1} \\
 & ۷- \frac{(1-3) \times \frac{3}{1+3}}{1} \\
 & ۸- \frac{1+3}{2+3} \\
 & ۹- \frac{(5-3) \times 3 \times 1 \times 2}{2-3} \\
 & ۱۰- \frac{(1-3) \times 5 \times 3 \times 1}{1} \\
 & ۱۱- \frac{(1-3) \times 8 \times 5 \times 2}{1} \\
 & ۱۲- \frac{(1+3) \times (1+3) \times (1-3) \times (1+3)}{1}
 \end{aligned}$$

۱۳- تیسری ۱۴- پانچویں ۱۵- تیسریں
 ۱۶- ساتویں ۱۷- چوتھی اور پانچویں ۱۸- تیسری

$$\begin{aligned}
 & ۱۹- 4589999 \\
 & ۲۰- 4599333 \\
 & ۲۱- 1000999 \\
 & ۲۲- 4699324 \\
 & ۲۳- 519842 \\
 & ۲۴- 500133 \\
 & ۲۵- 500099 \\
 & ۲۶- 1 - \frac{33}{4} \\
 & ۲۷- 1 - \frac{5}{8} \\
 & ۲۸- \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{33}\right) \\
 & ۲۹- \frac{1}{4} - \frac{5}{9} \\
 & ۳۰- \frac{1}{4} - \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ۱۸- \frac{\text{لوک ج}}{\text{لوک ا} - \text{لوک ب}} - ۱۹- \frac{\text{لوک ج}}{\text{لوک ا} + \text{لوک ب}} \\
 & ۲۰- \frac{\text{لوک ا} + \text{لوک ب}}{\text{لوک ج} - \text{لوک ا} + \text{لوک ب}} \\
 & ۲۱- \frac{\text{لوک م}}{\text{لوک ا}} = \text{لا} , \frac{\text{لوک م}}{\text{لوک ب}} = \text{ما} \\
 & ۲۲- \text{لوک لا} = \frac{1}{5}(\text{لوک ا} + \text{لوک ب}) , \text{لوک ما} = \frac{1}{5}(\text{لوک ا} - \text{لوک ب}) \\
 & ۲۳- \frac{\text{لوک (ا} - \text{ب)}}{\text{لوک (ا} + \text{ب)}}
 \end{aligned}$$

امثلہ نمبری ۲۹ (سنت ۳۵۲-۳۵۶)

(۱)

$$\begin{aligned}
 & ۱- \text{ا} , \text{ب} , \text{پ} , \text{ت} , \text{ث} , \text{ج} \\
 & ۲- ۳۵۸۸۲۱۲۵۹ , ۲۵۸۸۲۱۲۵۹ , ۵۸۸۲۱۲۵۹ \\
 & \quad ۴۵۸۸۲۱۲۵۹ , ۵۵۸۸۲۱۲۵۹ \\
 & ۳- \text{ا} , \text{ب} , \text{پ} , \text{ت} , \text{ث} , \text{ج} - \text{اعتباریہ میں دوسرا پہلا پانچواں مقام} \\
 & ۴- ۱۵۹۲۳۲۷۹۳ \\
 & ۵- ۱۵۸۰۶۱۸۰۰ \\
 & ۶- ۱۵۱۰۷۲۱۰۰ \\
 & ۷- ۱۵۱۵۸۳۶۲۶ \\
 & ۸- ۲۵۰۹۶۹۱۰۰ \\
 & ۹- ۱۵۵۹۷۲۷۱ \\
 & ۱۰- ۱۵۹۹۰۰۶۷ \\
 & ۱۱- ۱۵۵۹۷۲۷۱ \\
 & ۱۲- ۱۵۵۹۷۲۷۱ \\
 & ۱۳- ۱۵۵۹۷۲۷۱ \\
 & ۱۴- ۱۵۵۹۷۲۷۱
 \end{aligned}$$

- ۱۵ - ۱۵۹۸۴۳۵ ۱۶ - ۱۹۱۵۹۳۵۱
 ۱۷ - ۱۵۱۹۹۸۹۹۲ ۱۸ - ۱۵۰۰۳۹۲۳۸
 ۱۹ - ۹۵۰۷۹۲۲۹ ۲۰ - ۱۷۸۵۱۴۱۵۱۹
 ۲۱ - ۹ ۲۲ - ۳۰۱ ۲۳ - ۳۳۴
 ۲۴ - ۴۵۲۹ ۲۵ - ۱۵۲۰۹ ۲۶ - ۱۴۵۲۰۹
 ۲۸ - ۴۵۵۹۲

$$۲۹ - \frac{\text{لوک } ۳}{\text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۳} = ۱۱, \quad \frac{\text{لوک } ۲}{\text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۳} = ۶$$

$$۳۰ - \frac{\text{لوک } ۳}{(۲ \text{ لوک } ۳ - ۳ \text{ لوک } ۲)} = ۱۱, \quad \frac{\text{لوک } ۲}{(۲ \text{ لوک } ۲ - ۳ \text{ لوک } ۳)} = ۶$$

۳۱ - ۱۵۹۴۴۰۱

$$۳۲ - \frac{\text{لوک } ۲}{۷ \text{ لوک } ۷} = ۵۱۷۸۱, \quad \frac{۷ \text{ لوک } ۷}{۲ \text{ لوک } ۷} = ۵۵۹۱۴$$

(ب)

- ۱ - ۲۵۴۲۸ ۲ - ۲۴۵۲۸ ۳ - ۲۴۲۵۸
 ۴ - ۰۵۰۹۱۱ ۵ - ۹۹۵۵ ۶ - ۵۷۵۵۸
 ۷ - ۵۵۵۵۸ ۸ - ۷۹۸۵۴ ۹ - ۸۵۰۰۲
 ۱۰ - ۵۰۹۳۴ ۱۱ - ۵۷۲۳ ۱۲ - ۵۰۰۲۸۹۹
 ۱۳ - ۳۴۴۷۰۰ ۱۴ - ۱۰۰۸۵۳۷۱
 ۱۵ - ۱۵۴۷ ۱۶ - ۳۵۲۳ = ۱۱, ۱۵۵۲ = ۶
 ۱۷ - ۲۵۸, ۱۰۵۵۵, ۲۲۵۹, ۳۵۸, ۴۵۵

ان اصطلاحات تجربیہ کی فہرست جو اس کتاب میں استعمال کی گئی ہیں



ENGLISH

اردو

Abscissa.....	فصلہ یا مقطوعہ
Absolute term.....	رقم مطلق
Algebra.....	جبر و مقابلہ - الجبر
Alternando (ratio).....	تبدیل (نسبت)
Antecedent (ratio).....	مقدم (نسبت)
Antilogarithms.....	عکسی لوگارتم
Approximation.....	تقرب
Arithmetical progression.....	سلسلہ حسابیہ
Arithmetic mean.....	اوسط حسابی
Base (triangle).....	قاعدہ (مثلث)
Binomial Theorem.....	مثلثہ ثنائی
Characteristic (logarithm).....	میزر (لوگارتم)
Circular Cone.....	مخروطہ مستدیر
Circular permutations.....	مدور ترتیبیں
Co-efficient.....	سہ یا کمر
Combination.....	اجتماع
Commensurable (numbers).....	متوافق (اعداد)

ENGLISH	اردو
Common difference	فرق مشترک
Common ratio	نسبت مشترک
Common logarithm	مروج یا عشری لوگارتم
Complementary (Combinations)	متمم (اجتماع)
Componendo (ratio)	ترکیب (نسبت)
Composite number	عدد مرکب
Compounding (of ratios)	تأیید (نسب)
Compound Surd	مرکب اصم
Concrete (quantities)	(مقادیر) مقرون
Conjugate	زوج یا مزدوج
Consecutive terms	ارقام متصلہ
Constant (quantity)	(مقدار) مستقل
Continued proportion	تناسب مسلسل
Convergence	استدقاق
Convergent series	مصدق سلسلہ
Corresponding values	مطابق قیمتیں
Co-ordinate	محدود
Cross Multiplication	ضرب چلیبائی
Cross section	تراش عمودی
Cube	مکعب

ENGLISH	اردو
Cube root	جذر الکعب
Denominator	نسب نام
Dependent (variable)	(متغیر) تابع
Descending powers	نزولی قوا
Determinants	مقطعات
Digits	ہندسے
Dimensions	ابعاد
Direct variation	تغیر مستقیم
Dissimilar (things)	غیر متشابه اشیا
Divergence	اتساع
Divergent series	متسع سلسلہ
Dividendo	تفصیل نسبت
Duplicate (ratio)	د نسبت، مشابہ
Elastic string	پگھلاؤ والی ریشی
Electric current	برقی رو
Eliminant	حاصل اسقاط
Eliminate	ساقط کرنا
Elimination	اسقاط
Equation	مساوات
Equilateral triangle	مثلث متساوی الاضلاع

ENGLISH

اردو

Equimultiples	اضمان متساویہ
Expand	پھیلاؤ
Expansion	صورت تفصیلی یا تفصیل
Exponential Theorem	مسئلہ قوت نما
Expression	جملہ
Extremes	طرفین
Even	بغت
Factor	جز ضربی
Finite series	سلسلہ متناہیہ
Formula	ضابطہ
Fractions	کسور
Fractional	کسری
Funtion (of X)	جملہ (لا کا)
Gas	گیس
General Form	صورت عامہ
Geometrical	ہندسیہ
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Gemoetric mean	نسبت مشترک
Gemoetry	علم ہندسہ
Harmonic mean	اوسط موسیقی

ENGLISH

اردو

Harmonic progression	سلسلہ موسیقی
Height	ارتفاع
Homogeneous (expression)	(جملہ) متجانسہ
Hyperbola	ہیڈرولی (قطعہ زائد)
Hypothesis	مفروضہ
Identity	مساوات متماثلہ
Imaginary quantities	مقادیر خیالی
Incommensurable (numbers)	متبائن (اعداد)
Independent (variable)	(متغیر) متبوع
Index	قوت نامہ
Induction	استقرا
Infinite great (small)	لا انتہا بڑا (چھوٹا)
Inifinite series	سلسلہ غیر متناہیہ
Integer	عدد صحیح
Intensity (of light)	اشتداد (روشنی)
Inverse variation	تغیر معکوس
Intvertendo (ratio)	عکس (نسبت)
Joint variation	تغیر مشترک
Jupiter	مشتری
Limit	انتہا یا حد

ENGLISH

اردو

Linear (permutations)	خطی (ترتیبیں)
Logarithm	لوگاریتم
Logarithmic series	لوگاریتمی سلسلے
Logarithmic Tables	جداول لوگاریتمی
Logarithmic base	لوگاریتمی اساس
Mantissa	اعشاریہ لوگاریتمی
Mass	مقدار مادہ
Middle term	درمیانی رقم
Multinomial theorem	مسئلہ کثیرالاعراقام
Multiple	ضعف
Multiplying factor	ضارب جز ضربی
Natural logarithm	طبی لوگاریتم
Natural numbers	اعداد طبیعیہ
Negative	منفی
N-factorial	ماصل ضربی ن
Notation	طریق کتابت
N th power	ن ^{ویں} قوت
N th root	ن ^{واں} جذر
Numerator	شمار کنندہ
Numerically	تعداداً

ENGLISH

اردو

Odd	طاق
Ordinate	معیق
Oscillating series	اہتزازی سلسلے
Oscillation	اہتزاز
Parabola	شلبجی (قطعہ مکانی)
Partial product	جزوی حاصل ضرب
Pendulum	رقاص
Perfect square	مربع کامل
Permutation	ترتیب
Plane	سطح مستوی
Planet	سیارہ
Polygon	کثیر الاضلاع
Position of rest	محل سکون
Positive	مثبت
Power	قوت
Pressure	دباؤ
Prime number	عدد مفرد
Product	حاصل ضرب
Proper fraction	کسر واجب
Proportion	تناسب

ENGLISH	اردو
Proportional	متناسب
Quadratic Equations	مساوات درجہ دوم
Quantities	مقادیر
Radical	علامت جذر
Radins	نصف قطر
Rationalise	ناطق بنانا
Rationalising factor	منطق جز ضربی
Rational quantity	مقدار ناطق یا منطق
(Ratio of) less inequality	نسبت صغریٰ
(Ratio of) great inequality	نسبت کبریٰ
Real quantities	مقادیر حقیقی
Reciprocal	متکافی یا مقلوب
Reciprocal equations	مساوات متکافیہ
Rectangle	مستطیل
Recurring decimal	کسور اعشاریہ متوالیہ
Recurring period	دور متوالی
Reduction	تحويل
Relation	رابطہ یا تعلق
Resistance (Electric)	مزاہمت
Resolution	تحلیل

ENGLISH

اردو

Revolution.....	گردش
Right cone	قائم مخروط
Root (of an equation)	قیمت (ساوات)
Significant (digits)	مخونا (ہندسے)
Similar surds	متشابه مقادیر اصم
Similar things	متشابه اشیا
Similar (triangles)	متشابه (شکلات)
Source of light	سبب روشنی
Speed	چال
Square	مربع
Square pile	مربع انبار
Square root	جذر
Straight line.....	خط مستقیم
Sub-duplicate (ratio).....	(نسبت، جذریہ)
Subsequent (ratio).....	تالی (نسبت)
Surds	مقادیر اصم
Tangent	ماس
Tension	تناؤ
Terms	ارقام
Transposition	عمل نقل

ENGLISH

اردو

Triangular pile مثلثی انبار

Triplicate (ratio) (نسبت) مثلثہ

Unequal roots غیر مساوی قوتیں

Unit اکائی

Unknown (quantities) (مقادیر) مجہول

Variable quantities متغیر مقادیر

Variation تغیر

(Vary) inversely (بدلتا ہے) بالعکس

(Vary) jointly (بدلتا ہے) بالاشترک

Venus زہرہ

Volume حجم

Vulgar fraction کسر عام

کتاب خانہ
مکتبہ جامعہ اسلامیہ

